Universität Rostock - Institut für Mathematik Wintersemester 2024/2025
Dr. Dennis Müller

Vorkurs Mathematik

Ergänzende Aufgaben für die Vorlesung

Aufgabe 1
Welche Rolle spielen Termumformungen bei folgenden Klausuraufgaben?

(a) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen X mit der Dichtefunktion

$$f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \mathbf{1}_{(0,1)}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Untersuchen Sie die Zahlenreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{k+1}$$

auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(c) Konvergiert die durch

$$f_n : \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt[n]{x}},$$

gegebene Funktionenfolge gleichmäßig? Falls ja, bestimmen Sie die Grenzfunktion!

Aufgabe 2
Schreiben Sie sämtliche der folgenden 10 Ausdrücke als Potenz der Zahl 2, d.h. finden Sie jeweils einen Exponenten $x \in \mathbb{R}$, sodass der Term in der Form 2^x geschrieben werden kann!

$$4096, \quad 4^{2^2}, \quad \sqrt[3]{4^5}, \quad \frac{2^{10}}{8^3}, \quad 2^{(2^2)}, \quad \frac{36^4}{3^8}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{512}, \quad 1, \quad \sqrt{8}$$

Aufgabe 3
Multiplizieren Sie in (a) und (b) aus, faktorisieren Sie (c) und (d)!

(a) $xy^2\left(3x - \frac{y^2}{2}\right)$

(b) $(x-3)(x^2+x)$

(c) $2xz^2 + 4x^2z$

(d) $x(y+1) + 3x^2(4y+4)$

Aufgabe 4
Vervollständigen Sie jeweils die binomische Formel, indem Sie $\boxed{?}$ durch einen passenden Term ersetzen!

(a) $\left(5 + \boxed{?}\right)^2 = 25 + 30x + 9x^2$

(b) $\left(\boxed{?} - 2x^2\right)\left(\boxed{?} + \boxed{?}\right) = y^8 - 4x^4$

(c) $\left(\boxed{?} - \boxed{?}\right)^2 = \frac{1}{16} - \boxed{?} + \frac{1}{x^2}$

(d) $(3x-2y)^3 = \boxed{?}$

Aufgabe 5
Fassen Sie die folgenden Terme zusammen und schreiben Sie sie als vollständig gekürzte Brüche!

(a) $\dfrac{3}{200} - \dfrac{7}{900}$

(b) $\dfrac{3}{14} - \dfrac{1}{42} + \dfrac{6}{35}$

(c) $\dfrac{1}{2x+1} - \dfrac{x}{3x-2}$

(d) $\dfrac{x+2}{x^2y^2} - \dfrac{y-2}{x^2y^3} + \dfrac{1}{x^3y^2}$

Aufgabe 6
Lösen Sie den großen Bruchstrich auf und fassen Sie soweit wie möglich zusammen!

(a) $\dfrac{9600 + 12000}{48}$

(b) $\dfrac{x^2 - 2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}$

(c) $\dfrac{(1-y)(1+z) - 1}{yz}$

(d) $\dfrac{(3a+3b) + (a^2 + 2ab + b^2)}{a+b}$

Aufgabe 7
Führen Sie die folgenden Polynomdivisionen aus!

(a) $\left(x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24\right) : (x+2)$

(b) $\left(x^4 + 3x^3 - 19x^2 - 27x + 90\right) : \left(x^2 - 9\right)$

Aufgabe 8
Zeichnen Sie die Graphen, die zu folgenden Gleichungen gehören, in ein ebenes Koordinatensystem ein. Welche Graphen entsprechen denen von Polynomfunktionen?

(a) $x = 3$

(b) $y = 2$

(c) $x + y = 3$

(d) $-(x-1)(x-2) = y$

(e) $yx + x = 0$

Aufgabe 9
Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Polynomfunktionen!

(a) $p_1(x) = -3x^2 + 9x + 210$

(b) $p_2(x) = x^3 - 8x^2 + 5x + 50$

(c) $p_3(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2x - 6$

Aufgabe 10
Lösen Sie die Gleichung
$$0 = x^4 + x^2 - 72.$$

Aufgabe 11
Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke jeweils unter eine (große) Wurzel. Dabei seien x und y positive Zahlen mit $x > y$.

$$5\sqrt{6},\quad \frac{\sqrt{7}}{2},\quad 3\cdot\sqrt[3]{3},\quad x\cdot\frac{1}{\sqrt{x}},\quad y^{1/3}\cdot y^{2/5},\quad \sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{8},\quad x^{3/4}\cdot y^{-1/2},\quad \frac{\sqrt{x-y}}{x^2-2xy+y^2},\quad \frac{x}{\sqrt[5]{x^6}}$$

Aufgabe 12
Schreiben Sie die Terme jeweils derart um, dass in den Nennern keine Wurzeln mehr auftauchen! Fassen Sie die Terme danach soweit wie möglich zusammen!

(a) $\dfrac{3}{\sqrt{5}+1}$

(b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{7}}$

(c) $\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$

(d) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$

Aufgabe 13
Berechnen Sie die folgenden Logarithmen!

(a) $\log_{\frac{1}{5}} 25$

(b) $\lg \dfrac{1}{1000}$

(c) $\log_4 32$

(d) $\ln \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

(e) $\log_{16} \dfrac{1}{2}$

(f) $\operatorname{lb} 1$

Aufgabe 14
Berechnen Sie!

(a) $\log_6 8 + \log_6 32$

(b) $\log_4 10 - \log_4 40$

(c) $\ln\sqrt{\dfrac{e}{2}} + \ln\sqrt{\dfrac{2}{e}}$

(d) $\dfrac{\lg\sqrt{e}}{\lg\sqrt[3]{e}}$

(e) $\log_{\frac{1}{4}} 3 + \log_2 \sqrt{3}$

Aufgabe 15
Bestimmen Sie zunächst die Definitionsbereiche der linken Seiten der folgenden Gleichungen und danach ihre Lösungsmenge!

(a) $\log_2(x^2+1) + 4\log_{16}(x^2-1) = 1$

(b) $\ln(2x+2) - \ln(5x-1) = -\ln 2$

Aufgabe 16

(a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f(x) = \ln(\ln(\ln(x^2 + 1)))$.

(b) Wie muss der Parameter a bei der Funktion $g(x) = e^{2x} + a$ gewählt werden, sodass g die Nullstelle $x = -\ln 2$ besitzt?

(c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen von $h_1(x) = \log_4(2x)$ und $h_2(x) = e^{2x^2} - 1$.

Aufgabe 17

Ein rechtwinkliges Dreieck habe Katheten der Länge 6 cm und 8 cm. Bestimmen Sie die Größe der übrigen Innenwinkel. Fertigen Sie zunächst eine Skizze an!

Aufgabe 18

(a) Bestimmen Sie alle $\varphi \in \mathbb{R}$, für die $\cos(\varphi) = \frac{1}{2}$ gilt.

(b) Bestimmen Sie alle $\varphi \in \mathbb{R}$, für die $\sin(\varphi) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt.

Aufgabe 19

Bestimmen Sie jeweils für die folgenden rekursiv gegebenen Zahlenfolgen die Glieder zu den Indizes $n = 1, 2, 3, 4$!

(a) $a_1 = 4,\ a_n = (-1)^n a_{n-1},\ n \geq 2$

(b) $b_1 = 1,\ b_n = 2b_{n-1}^2 - b_{n-1} + 3,\ n \geq 2$

(c) $c_1 = 3, c_2 = 5,\ c_n = 3c_{n-1} - 4c_{n-2},\ n \geq 3$

(d) $d_1 = \frac{\pi}{2},\ d_n = \pi \cos(d_{n-1} + \pi),\ n \geq 2$

Aufgabe 20

Von einer Folge (a_n) seien die Glieder

$$a_2 = 5, \quad a_3 = 17, \quad a_4 = 53, \quad a_5 = 161,$$

bekannt. Überlegen Sie sich eine passende rekursive Bildungsvorschrift und bestimmen Sie mit dieser a_6!

Aufgabe 21

Geben Sie zu den expliziten Folgen

$$a_n = 7n - 4, \qquad b_n = \cos(n\pi) \quad \text{und} \quad c_n = 3^{2n+1}$$

jeweils die zugehörige rekursive Bildungsvorschrift an. Berechnen Sie dafür zunächst einige Glieder und bestimmen Sie dann den passenden Startwert und die Rekursionsvorschrift!

Aufgabe 22

(a) Bestimmen Sie die Werte folgender Summen!

(i) $\sum_{k=3}^{6} (4k - 2)$

(ii) $\sum_{k=1}^{4} \frac{k+1}{k+2}$

(iii) $\sum_{k=3}^{5} \frac{3^k}{2k-1}$

(b) Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke kompakt unter Verwendung des Summenzeichens. Eine Berechnung ist nicht erforderlich.

(i) $7+12+17+22+27+32+37$

(ii) $6\cdot 8+10\cdot 12+14\cdot 16+18\cdot 20$

(iii) $\frac{5}{8}+\frac{10}{27}+\frac{17}{64}+\frac{26}{125}$

Aufgabe 23
Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung von $f_1(x)=3x^2\ln(x)$ und $f_2(x)=\sin(x)\cos(x)$.

Aufgabe 24
Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung von $g_1(x)=\dfrac{\ln(x)}{1+x}$ und $g_2(x)=\tan(x)$.

Aufgabe 25
Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung von $h_1(x)=(1-\sin(x))^8$ und $h_2(x)=\sqrt{e^{x^2}-1}$.

Aufgabe 26
Berechnen Sie $\displaystyle\int \sqrt{3x+1}\,dx$ und $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2x+2}\,dx$.

Aufgabe 27
Bestimmen Sie mit dem Gauß-Algorithmus die Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 3x+y+z&=17\\ -12x-y+3z&=-37\\ 6x-2y-2z&=14 \end{aligned}$$