

## Vektorzahlen ohne imaginäre Komponenten

Wolf-Dieter Richter

Institut für Mathematik, Universität Rostock

Wenn eine klassische quadratische Gleichung keine reelle Nullstelle besitzt, führt man oft auf bekannte Weise Lösungen unter Einbeziehung einer imaginären Größe ein. Ersetzt man den entstehenden imaginär-reellen bzw. komplexen Lösungsraum durch einen zweidimensionalen rein reellen Vektorraum und reformuliert die Ausgangsgleichung angepasst für diesen Raum, so überführt man komplexe Lösungen in symmetrisch zur  $x$ -Achse gelegene vektorielle Lösungen und verwandelt die u.a. auf Gauß und Hamilton zurückgehenden Interpretationen der komplexen Zahlen als Punkte in einer Ebene bzw. als Menge geordneter Paare reeller Zahlen in ein Axiom für die Einführung von Vektorzahlen ohne imaginäre Komponente. Die in der Ebene naheliegende Betrachtung der üblichen komplexen Multiplikation als Überlagerung einer Rotation und einer Multiplikation mit einem nicht-negativen reellen Skalar findet in diesem axiomatischen Zugang ihren Niederschlag in der Einführung eines neuen Begriffes der vektorwertigen Multiplikation von Vektoren. Dieser kann wesentlich verallgemeinert werden, indem man anstelle der Rotationen Bewegungen auf der Einheits-Kreislinie  $S$  bezüglich einer beliebigen Norm, Antinorm bzw. Semi-Antinorm  $\|\cdot\|$  im  $R^2$  betrachtet und diese durch eine vektorwertige Vektor-Multiplikation  $\odot : R^2 \times R^2 \rightarrow R^2$  beschreibt. Hierzu erweisen sich angepasst definierte verallgemeinerte trigonometrische Funktionen und die zugehörige Koordinatentransformation  $(x, y) = Pol_S(r, \varphi)$  als nützliche Hilfsmittel. Implementiert man zusätzlich die Multiplikation eines Vektors mit einem nicht-negativen reellen Skalar  $\cdot : R \times R^2 \rightarrow R^2$  in die Multiplikation  $\odot$ , dann lässt sich die Multiplikation zweier Vektoren äquivalent durch die Addition zweier Winkel und die Multiplikation zweier verallgemeinerter Radien ausdrücken:  $Pol_S(r_1, \varphi_1) \odot Pol_S(r_2, \varphi_2) = Pol_S(r_1 r_2, \varphi_1 + \varphi_2)$ . Die Mannigfaltigkeit  $S = Pol_S(1, [0, 2\pi))$  bildet dann gemeinsam mit dem Produkt  $\odot$  die Lie Gruppe  $(S, \odot)$  der nicht-klassisch verallgemeinerten komplex-algebraischen bzw. Vektorzahlen Struktur

$$\mathfrak{C}_{\|\cdot\|} = (R^2, \|\cdot\|, \oplus, \odot, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{I}),$$

wobei  $\oplus$  die Vektoraddition bezeichnet,  $\mathbf{0}$  das additiv neutrale Element,  $\mathbf{1}$  das multiplikativ neutrale Element und  $\mathbf{I}$  ein von  $\mathbf{1}$  linear unabhängiges Vektorraumelement mit  $\mathbf{I} \odot \mathbf{I} = -\mathbf{1}$ . Eine gegen die Normen äußerster mathematischer Strenge verstoßende direkte Gleichsetzung von  $1$  und  $\mathbf{1}$  wird hierbei vermieden. Die sich unmittelbar anschließenden Definitionen von Vektor-Potenz-, Quotient-, Exponentialfunktion und-Logarithmus besitzen dann sehr anschauliche Interpretationen und eröffnen insbesondere ein weites neues Feld nicht-klassisch adaptierter und verallgemeinerter komplexer Analysis und geometrischer Algebra.

Auf analoge Weise können unter anderem tri-komplexe Zahlen mit ihren zwei imaginären Einheiten, Cockle's Tessarines und die Hamilton'schen Quaternionen mit ihren jeweils drei imaginären Einheiten sowie Olariu's n-dimensionale komplexe Zahlen mit ihren n-1 imaginären Einheiten in Elemente des  $R^3$ ,  $R^4$  bzw.  $R^n$ , d.h. in Vektoren mit ausschließlich reellen Komponenten, überführt werden.

Die historisch zunächst umstrittene und später als 'formale Gleichung', welche ja auf wenigstens eine Weise mit bekannten mathematischen Objekten realisierbar sein müsste, pragmatisch aufgewertete beziehungsweise fehlgedeutete Beziehung  $i^2 = -1$  kann sich im axiomatischen Zugang mit  $\mathbf{I} = (0, 1)^T$  und  $\mathbf{1} = (1, 0)^T$  als obige Vektor-Gleichung  $\mathbf{I}^{\odot 2} = -\mathbf{1}$  widerspiegeln und Euler's Formel  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  wird dann mit geeigneter Definition der vektorwertigen Vektor-Exponentialfunktion zu  $\exp_S(x\mathbf{I}) = (\cos_S x)\mathbf{1} + (\sin_S x)\mathbf{I}$ , welche für alle o.g.  $S$  gilt. Auch der die Eindeutigkeit bei der Wahl von  $\mathbf{I}$  ausschließende Fall  $\mathbf{1} = (a, 0)^T, \mathbf{I} = (0, b)^T$  wird im Vortrag behandelt.