

Vorkurs Mathematik

Ergänzende Aufgaben für die Vorlesung

Aufgabe 1

Welche Rolle spielen Termumformungen bei folgenden Klausuraufgaben?

- (a) Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktion $f(x) = \ln(x^{3x})$.
- (b) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (c) Untersuchen Sie die Zahlenreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{k+1}$$

auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

Aufgabe 2

Schreiben Sie sämtliche der folgenden 10 Ausdrücke als Potenz der Zahl 2, d.h. finden Sie jeweils einen Exponenten $x \in \mathbb{R}$, sodass der Term in der Form 2^x geschrieben werden kann!

$$4096, \quad 4^{2^2}, \quad \sqrt[3]{4^5}, \quad \frac{2^{10}}{8^3}, \quad 2^{(2^2)}, \quad \frac{36^4}{3^8}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{512}, \quad 1, \quad \sqrt{8}$$

Aufgabe 3

Multiplizieren Sie in (a) und (b) aus, faktorisieren Sie (c) und (d)!

- (a) $xy^2 \left(3x - \frac{y^2}{2} \right)$
- (b) $(x-3)(x^2+x)$
- (c) $2xz^2 + 4x^2z$
- (d) $x(y+1) + 3x^2(4y+4)$

Aufgabe 4

Vervollständigen Sie jeweils die binomische Formel, indem Sie $\boxed{?}$ durch einen passenden Term ersetzen!

- (a) $\left(5 + \boxed{?} \right)^2 = 25 + 30x + 9x^2$
- (b) $\left(\boxed{?} - 2x^2 \right) \left(\boxed{?} + \boxed{?} \right) = y^8 - 4x^4$
- (c) $\left(\boxed{?} - \boxed{?} \right)^2 = \frac{1}{16} - \boxed{?} + \frac{1}{x^2}$
- (d) $(3x - 2y)^3 = \boxed{?}$

Aufgabe 5

Fassen Sie die folgenden Terme zusammen und schreiben Sie sie als vollständig gekürzte Brüche!

- (a) $\frac{3}{200} - \frac{7}{900}$
- (b) $\frac{3}{14} - \frac{1}{42} + \frac{6}{35}$
- (c) $\frac{1}{2x+1} - \frac{x}{3x-2}$
- (d) $\frac{x+2}{x^2y^2} - \frac{y-2}{x^2y^3} + \frac{1}{x^3y^2}$

Aufgabe 6

Lösen Sie den großen Bruchstrich auf und fassen Sie soweit wie möglich zusammen!

- (a) $\frac{9600 + 12000}{48}$
- (b) $\frac{x^2 - 2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}$
- (c) $\frac{(1-y)(1+z) - 1}{yz}$
- (d) $\frac{(3a+3b) + (a^2 + 2ab + b^2)}{a+b}$

Aufgabe 7

Führen Sie die folgenden Polynomdivisionen aus!

- (a) $(x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24) : (x + 2)$
- (b) $(x^4 + 3x^3 - 19x^2 - 27x + 90) : (x^2 - 9)$

Aufgabe 8

Zeichnen Sie die Graphen, die zu folgenden Gleichungen gehören, in ein ebenes Koordinatensystem ein. Welche Graphen entsprechen denen von Polynomfunktionen?

- (a) $x = 3$
- (b) $y = 2$
- (c) $x + y = 3$
- (d) $-(x-1)(x-2) = y$
- (e) $yx + x = 0$

Aufgabe 9

Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Polynomfunktionen!

- (a) $p_1(x) = -3x^2 + 9x + 210$
- (b) $p_2(x) = x^3 - 8x^2 + 5x + 50$
- (c) $p_3(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2x - 6$

Aufgabe 10

Lösen Sie die Gleichung

$$0 = x^4 + x^2 - 72.$$

Aufgabe 11

Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke jeweils unter eine (große) Wurzel. Dabei seien x und y positive Zahlen mit $x > y$.

$$5\sqrt{6}, \quad \frac{\sqrt{7}}{2}, \quad 3 \cdot \sqrt[3]{3}, \quad x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad y^{1/3} \cdot y^{2/5}, \quad \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{8}, \quad x^{3/4} \cdot y^{-1/2}, \quad \frac{\sqrt{x-y}}{x^2 - 2xy + y^2}, \quad \frac{x}{\sqrt[5]{x^6}}$$

Aufgabe 12

Schreiben Sie die Terme jeweils derart um, dass in den Nennern keine Wurzeln mehr auftauchen!
Fassen Sie die Terme danach soweit wie möglich zusammen!

- (a) $\frac{3}{\sqrt{5} + 1}$
- (b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{7}}$
- (c) $\frac{2x}{\sqrt{1 - x^2}}$
- (d) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}$

Aufgabe 13

Berechnen Sie die folgenden Logarithmen!

- (a) $\log_{\frac{1}{5}} 25$
- (b) $\lg \frac{1}{1000}$
- (c) $\log_4 32$
- (d) $\ln \frac{1}{\sqrt{e}}$
- (e) $\log_{16} \frac{1}{2}$
- (f) $\lg 1$

Aufgabe 14

Berechnen Sie!

- (a) $\log_6 12 + \log_6 18$
- (b) $\log_4 10 - \log_4 40$
- (c) $\ln \sqrt{\frac{e}{2}} + \ln \sqrt{\frac{2}{e}}$
- (d) $\frac{\lg \sqrt{e}}{\lg \sqrt[3]{e}}$
- (e) $\log_{\frac{1}{4}} 3 + \log_2 \sqrt{3}$

Aufgabe 15

Bestimmen Sie zunächst die Definitionsbereiche der linken Seiten der folgenden Gleichungen und danach ihre Lösungsmenge!

- (a) $\log_2(x^2 + 1) + 4 \log_{16}(x^2 - 1) = 1$
- (b) $\ln(2x + 2) - \ln(5x - 1) = -\ln 2$

Aufgabe 16

- (a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f(x) = \ln(\ln(\ln(x^2 + 1)))$.
- (b) Wie muss der Parameter a bei der Funktion $g(x) = e^{2x} + a$ gewählt werden, sodass g die Nullstelle $x = -\ln 2$ besitzt?

- (c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen von $h_1(x) = \log_4(2x)$ für $x > 0$ und von $h_2(x) = e^{2x^2} - 1$ für $x \geq 0$.

Aufgabe 17

Ein rechtwinkliges Dreieck habe Katheten der Länge 6 cm und 8 cm. Bestimmen Sie die Größe der übrigen Innenwinkel. Fertigen Sie zunächst eine Skizze an!

Aufgabe 18

- (a) Bestimmen Sie alle $\varphi \in \mathbb{R}$, für die $\cos(\varphi) = \frac{1}{2}$ gilt.
- (b) Bestimmen Sie alle $\varphi \in \mathbb{R}$, für die $\sin(\varphi) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt.

Aufgabe 19

Bestimmen Sie jeweils für die folgenden rekursiv gegebenen Zahlenfolgen die Glieder zu den Indizes $n = 1, 2, 3, 4$!

- (a) $a_1 = 4, a_n = (-1)^n a_{n-1}, n \geq 2$
- (b) $b_1 = 1, b_n = 2b_{n-1}^2 - b_{n-1} + 3, n \geq 2$
- (c) $c_1 = 3, c_2 = 5, c_n = 3c_{n-1} - 4c_{n-2}, n \geq 3$
- (d) $d_1 = \frac{\pi}{2}, d_n = \pi \cos(d_{n-1} + \pi), n \geq 2$

Aufgabe 20

Von einer Folge (a_n) seien die Glieder

$$a_2 = 5, \quad a_3 = 17, \quad a_4 = 53, \quad a_5 = 161,$$

bekannt. Überlegen Sie sich eine passende rekursive Bildungsvorschrift und bestimmen Sie mit dieser a_6 !

Aufgabe 21

Geben Sie zu den expliziten Folgen

$$a_n = 7n - 4, \quad b_n = \cos(n\pi) \quad \text{und} \quad c_n = 3^{2n+1}$$

jeweils die zugehörige rekursive Bildungsvorschrift an. Berechnen Sie dafür zunächst einige Glieder und bestimmen Sie dann den passenden Startwert und die Rekursionsvorschrift!

Aufgabe 22

- (a) Bestimmen Sie die Werte folgender Summen!

(i) $\sum_{k=3}^6 (4k - 2)$

(ii) $\sum_{k=1}^4 \frac{k+1}{k+2}$

(iii) $\sum_{k=3}^5 \frac{3^k}{2k-1}$

- (b) Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke kompakt unter Verwendung des Summenzeichens. Eine Berechnung ist nicht erforderlich.

(i) $7 + 12 + 17 + 22 + 27 + 32 + 37$

(ii) $6 \cdot 8 + 10 \cdot 12 + 14 \cdot 16 + 18 \cdot 20$

(iii) $\frac{5}{8} + \frac{10}{27} + \frac{17}{64} + \frac{26}{125}$

Aufgabe 23

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung von $f_1(x) = 3x^2 \ln(x)$ und $f_2(x) = \sin(x) \cos(x)$.

Aufgabe 24

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung von $g_1(x) = \frac{\ln(x)}{1+x}$ und $g_2(x) = \tan(x)$.

Aufgabe 25

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung von $h_1(x) = (1 - \sin(x))^8$ und $h_2(x) = \sqrt{e^{x^2} - 1}$.

Aufgabe 26

Berechnen Sie $\int \sqrt{3x+1} \, dx$ und $\int_1^2 \frac{1}{2x+2} \, dx$.

Aufgabe 27

Bestimmen Sie mit dem Gauß-Algorithmus die Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 3x + y + z &= 17 \\ -12x - y + 3z &= -37 \\ 6x - 2y - 2z &= 14 \end{aligned}$$