

Vorkurs Mathematik

Vorkurs - Skript

Willkommen!

Das gesamte Veranstaltungsteam begrüßt Sie an der Universität Rostock sowie zum Vorkurs Mathematik! In den kommenden zwei Wochen wiederholen wir gemeinsam einige der Themen, die bereits in der Schule eingeführt wurden und nun in Ihren mathematischen Vorlesungen zur Anwendung kommen. Dabei fokussieren wir uns auf folgende Schwerpunkte:

Woche 1: Potenz-, Wurzel- und Logarithmengesetze, Bruchrechnung, Polynome

Woche 2: Exponentialfunktion, Trigonometrie, Folgen und Reihen, Differential- und Integralrechnung, Gleichungssysteme

Beim Blick auf diese Themenliste fällt sicher auf, dass wir uns im Vorkurs viel Zeit für die Wiederholung elementarer Termumformungen nehmen. Erfahrungsgemäß sind viele Probleme, die beim Bearbeiten von Übungs- und Klausuraufgaben im ersten Studienjahr auftreten, auf Defizite in diesem Bereich zurückzuführen. An der Reduzierung solcher Hürden wollen wir in den nächsten zwei Wochen arbeiten. Den soliden Umgang mit den mathematischen Grundfunktionen setzen wir im ersten Semester voraus und bauen darauf auf; Zeit für eine umfassende Auffrischung dieser Themen steht innerhalb des Semesters regelmäßig nicht zur Verfügung. Wir werden daher im Vorkurs keine neuen Inhalte einführen, die ohnehin vertieft im ersten Semester behandelt werden, sondern wiederholen die grundlegenden Voraussetzungen, mit denen Sie die neue Mathematik verstehen können. Das Ziel des Vorkurses ist es, Ihnen eine Brücke zwischen der Schul- und der Universitätsmathematik zu bauen. Ich wünsche uns allen dabei ein gutes Gelingen!

Wir behandeln nun **Aufgabe 1.**

Kapitel 1: Rechnen mit Potenzen

Potenzen sind Ihnen schon aus der frühen Schulzeit bekannt. Sie haben die Gestalt

$$a^n \quad (= b),$$

wobei a **Basis** genannt wird, n **Exponent** und es sich bei b um den **Potenzwert** handelt, den man im Falle, dass das n eine natürliche Zahl ist, erhält, indem man a genau n mal mit sich selbst multipliziert. In den folgenden Tagen werden wir immer wieder die Situation haben, dass wir zwei Teile der Gleichung $a^n = b$ kennen und den dritten, unbekannten Part suchen. Demnach können die folgenden drei Situationen entstehen:

Situation 1: Basis a und Exponent n sind gegeben, Potenzwert b ist gesucht.

Situation 2: Exponent n und Potenzwert b sind gegeben, Basis a ist gesucht.

Situation 3: Basis a und Potenzwert b sind gegeben, Exponent n ist gesucht.

Die erste Situation ist wohl die leichteste, denn Sie erhalten durch **Potenzieren** den gesuchten Wert b , indem Sie das n -fache Produkt von a mit sich selbst bilden.

In der Situation 2 müssen Sie **Radizieren** - oder auch Wurzelziehen. Unter geeigneten Voraussetzungen können Sie

$$a = \sqrt[n]{b}$$

schreiben.

Letztlich erhalten Sie den Exponenten n in der dritten Situation durch das sogenannte **Logarithmieren**. Unter passenden Anforderungen an a und b kann man

$$n = \log_a b$$

setzen.

Unser erstes Hauptziel im Vorkurs ist es, die Gesetzmäßigkeiten für diese drei zentralen Rechenoperationen zu verstehen und eine anschauliche Vorstellung der zugehörigen Funktionen zu entwickeln. Wir wollen uns zunächst auf die sogenannten **Potenzgesetze** konzentrieren, die das Potenzieren regeln. Seien dafür zunächst x eine beliebige reelle Zahl und n eine natürliche Zahl, also aus der Menge $\{1, 2, \dots\}$. Dann ist zunächst

$$x^n := \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n\text{-mal}}.$$

So ist etwa $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$. Ist m eine weitere natürliche Zahl, dann können wir Potenzen mit gleicher Basis multiplizieren, indem wir die Exponenten addieren:

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}, \quad \text{z.B.} \quad 5^2 \cdot 5^3 = 5^5 = 3125.$$

Beachten Sie, dass die Übereinstimmung der Basen wesentlich ist. Sei nun y eine weitere reelle Zahl. Potenzen mit unterschiedlichen Basen und gleichen Exponenten lassen sich ebenfalls zusammenfassen, wobei man dieses Mal die Basen multipliziert:

$$x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n, \quad \text{z.B.} \quad 2^4 \cdot 5^4 = 10^4 = 10000.$$

Ist die Basis selbst eine Potenz, die wiederum potenziert wird, sind die Exponenten zu multiplizieren.

$$(x^n)^m = x^{n \cdot m}, \quad \text{z.B.} \quad (2^5)^2 = 2^{5 \cdot 2} = 2^{10} = 1024.$$

Sicherlich sind Ihnen Potenzen mit negativen Exponenten bereits bekannt. So gilt etwa, sofern $x \neq 0$, dass

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad \text{z.B.} \quad 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}.$$

Negative Exponenten führen also dazu, dass die Potenz (mit umgekehrtem Vorzeichen im Exponenten) in den Nenner eines Bruches gelangt. Auch rationale Exponenten, also Brüche, kann man behandeln. Sei $x \geq 0$, dann haben wir

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}, \quad \text{z.B.} \quad 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{16^1} = \sqrt{16} = 4.$$

Hierbei tauchen also bereits Wurzeln auf, die wir detailliert später behandeln. Indem wir $x^{-n} = 1/x^n$ verwenden, erhalten wir auch

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}, \quad \text{z.B.} \quad \frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3 = 27$$

und

$$\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n, \quad \text{z.B.} \quad \frac{20^3}{5^3} = \left(\frac{20}{5}\right)^3 = 4^3 = 64.$$

Wichtig ist dabei, dass wir nicht durch Null dividieren, also $x \neq 0$ bzw. $y \neq 0$ voraussetzen. Weiterhin gilt für jede reelle Zahl x stets $x^0 = 1$, also sogar $0^0 = 1$.

Bei sogenannten **Potenztürmen** müssen Sie darauf achten, ob und ggf. wie geklammert wird. Der Ausdruck

$$x^{n^m}$$

meint stets $x^{(n^m)}$ und liefert daher üblicherweise einen anderen Wert, als wenn entsprechend des obigen Potenzgesetzes $(x^n)^m$ geklammert würde. Man kann auch noch „höhere“ Potenztürme aufstellen und rechnet dabei die Potenzen „von oben nach unten“ aus, etwa

$$3^{3^{2^2}} = 3^{(3^{(2^2)})} = 3^{(3^4)} = 3^{81}.$$

Wir behandeln nun **Aufgabe 2**.

Bevor wir fortfahren, wollen wir auf einige grundlegende **Rechengesetze der Arithmetik** für die Addition und Multiplikation eingehen. Sicherlich kennen Sie noch das **Kommutativgesetz** für die Addition und Multiplikation. Es erlaubt die Vertauschung von Summanden bzw. Faktoren:

$$x + y = y + x \quad \text{bzw.} \quad x \cdot y = y \cdot x.$$

Gemäß dem **Assoziativgesetz** können Sie bei mehreren gleichartigen Rechenoperationen in einem Term gewissermaßen entscheiden, wo Sie beginnen wollen, denn es gelten

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \text{bzw.} \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

Bei Summen mit drei Summanden können Sie mit der Addition also auch hinten beginnen, bei Produkten entsprechend. Am wichtigsten ist für uns das **Distributivgesetz**, denn es schafft die Grundlage für das, was man in der Mittelstufe **Ausklammern** und **Ausmultiplizieren** nennt. Es verbindet Addition und Multiplikation wie folgt:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \text{und} \quad (y + z) \cdot w = y \cdot w + z \cdot w.$$

Vereinfacht gesprochen multipliziert man zwei Summen, indem jeder Summand aus der einen Klammer mit jedem Summanden aus der anderen Klammer multipliziert wird:

$$(w + x) \cdot (y + z) = (w + x) \cdot y + (w + x) \cdot z = wy + xy + wz + xz.$$

Gemäß üblicher Notation lässt man den Multiplikationspunkt oft weg.

Diese elementaren Rechengesetze mögen Ihnen vielleicht wie Trivialitäten erscheinen, es ist jedoch wichtig, dass man diese Begriffe einordnen kann. Auf die Gründe wollen wir kurz eingehen:

Grund 1: Die Gesetze sind nicht gültig. Sie werden sich im ersten Studienjahr mit Matrizen beschäftigen, für die auch eine Multiplikation definiert werden kann. Für diese ist das Kommutativgesetz jedoch oft verletzt, wie folgendes Beispiel demonstriert (wobei die Details der Rechnung noch nicht verstanden werden müssen!):

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Grund 2: Man untersucht im Studium abstrakte algebraische Strukturen, z.B. abelsche Gruppen, Körper oder Ringe, für die jeweils oft nur ein Teil dieser Gesetze vorausgesetzt werden muss. So unterscheidet man zum Beispiel, dass die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bezüglich $+$ sehr wohl ein *inverses Element* besitzen, bezüglich $\cdot$ jedoch nicht (in $\mathbb{Z}$).

Grund 3: Das Ausmultiplizieren stellt Klausurteilnehmer immer wieder vor Herausforderungen. So ist etwa $x \cdot (x^2 + 1) \neq x^3 + 1$, sondern $= x^3 + x$

Das Ausmultiplizieren ist eine Vorwärtsanwendung des Distributivgesetzes, das Ausklammern die Rückwärtsanwendung dessen. Beim Ausklammern wählt man in einer Summe stets einen möglichst „großen“ Faktor, der in allen Summanden steckt (also multiplikativ enthalten ist), und setzt diesen vor die Klammer:

$$6z^2 + 12z^5 + 15z^3 = 3z^2 (2 + 4z^3 + 5z)$$

Wir behandeln nun **Aufgabe 3**.

Zu den Standardbeispielen zum Distributivgesetz zählen die Binomischen Formeln, die Ihnen seit der achten Klasse bekannt sind. Für beliebige reelle Zahlen x und y gelten bekanntermaßen

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \quad \text{also etwa} \quad (2 + 7x)^2 = 4 + 28x + 49x^2,$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2, \quad \text{also etwa} \quad (4y - 2)^2 = 16y^2 - 16y + 4$$

und

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2, \quad \text{also etwa} \quad (2 - x)(2 + x) = 4 - x^2.$$

Immer wieder müssen Summen auch in die dritte Potenz gehoben werden, wobei man

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

verwendet. Setzt man in dieser Formel für y gerade $-y$ ein, dann gelangt man zu

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3.$$

Formeln für höhere Potenzen der Summe $(x + y)$ erhält man z.B. mit Hilfe des **Pascalschen Dreiecks**, das in der Vorlesung näher untersucht wird.

Wir behandeln nun **Aufgabe 4**.

Kapitel 2: Terme mit Brüchen

Wir wollen einen Exkurs in die **Bruchrechnung** vornehmen. Brüche (oder auch rationale Zahlen) entstehen, wenn zwei ganze Zahlen a und b dividiert werden. Jede rationale Zahl q besitzt eine (nicht eindeutige) Darstellung der Form

$$q = \frac{a}{b},$$

wobei natürlich $b \neq 0$ vorausgesetzt werden muss. Einen Bruch zu **erweitern** heißt, sowohl den Zähler a als auch den Nenner b mit einer Zahl, nennen wir sie hier d , zu multiplizieren. Natürlich muss auch $d \neq 0$ gelten. Dabei ändert sich der Wert des Bruches nicht, sondern nur seine Darstellung:

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}.$$

Entsprechend **kürzt** man einen Bruch, indem man a und b durch denselben Wert teilt. Erweiterung und Kürzung von Brüchen legen das Fundament für die Addition. Sei c eine ganze Zahl. Dann gilt

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Gleichnamige Brüche, also solche, bei denen die Nenner übereinstimmen, kann man direkt durch Addition des Zählers unter Beibehaltung des Nenners addieren. Diesen Zustand muss man oft erst durch Kürzung oder Erweiterung herbeiführen. Eine Möglichkeit, gleiche Nenner (und damit den

Hauptnenner) zu erzeugen ist es, alle auftauchenden Nenner zu multiplizieren. Dieser Nenner ist nur dann der kleinstmögliche Hauptnenner, wenn die Nenner teilerfremd waren. So ist z.B. bei

$$\frac{3}{5} + \frac{7}{10} = \frac{3 \cdot 10}{5 \cdot 10} + \frac{5 \cdot 7}{5 \cdot 10} = \frac{30 + 35}{50} = \frac{65}{50} = \frac{13}{10}$$

bei dieser „Taktik“ am Ende zu kürzen, weil 5 und 10 den gemeinsamen Teiler 5 besitzen. Das kleinste gemeinsame Vielfache wäre 10 gewesen und stimmt auch mit dem kleinsten Hauptnenner überein. Bei

$$\frac{3}{5} + \frac{7}{11} = \frac{3 \cdot 11}{5 \cdot 11} + \frac{5 \cdot 7}{5 \cdot 11} = \frac{33 + 35}{55} = \frac{68}{55}$$

entfällt hingegen das abschließende Kürzen, denn 5 und 11 sind teilerfremd. Schauen wir uns hierzu die folgenden Beispiele an:

$$\begin{aligned} \frac{5}{6} + \frac{3}{10} + \frac{5}{12} &= \frac{50 + 18 + 25}{60} = \frac{93}{60} = \frac{31}{20} \\ \frac{3}{a} - \frac{1}{ab} + \frac{2}{b} &= \frac{3b - 1 + 2a}{ab} \\ \frac{1}{x-1} + \frac{x}{(x-1)^2} &= \frac{(x-1) + x}{(x-1)^2} = \frac{2x-1}{(x-1)^2} \\ \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} &= \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} + \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x}{x^2-1} \end{aligned}$$

Wir behandeln nun **Aufgabe 5**.

Sicher kennen Sie den wenig charmanten Spruch, nachdem nur die „Dummen“ in Summen kürzen. Wir wollen nun beleuchten, unter welchen Voraussetzungen gewisse Termumformungen bei Brüchen mit Summen möglich sind. Grundsätzlich gilt

$$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}.$$

Brüche, bei denen im Zähler eine Summe auftaucht, können Sie also stets summandenweise in seine Einzelteile zerlegen und dann wie gehabt kürzen. Bei Summen im Nenner ist oft weniger möglich. Wir verdeutlichen das an folgendem Beispiel:

$$\frac{3x^3 - 4x^5}{x^2} = \frac{3x^3}{x^2} - \frac{4x^5}{x^2} = 3x - 4x^3,$$

bei dem die Summe im Zähler zerlegt und jeder einzelne Summand mit dem (gesamten) Nenner gekürzt werden kann. Wäre der Term hingegen

$$\frac{3x^3 - 4x^5}{x^2 + 1}$$

gewesen, so wäre keine einfache Kürzung möglich gewesen. Man kann keineswegs nur mit dem x^2 aus dem Nenner Kürzungen im Zähler vornehmen. Sie könnten zwar x^2 im Nenner ausklammern, hätten dann aber dort den Ausdruck $x^2(1 + \frac{1}{x^2})$, wodurch Sie einen weiteren Bruch erzeugen würden. Wir merken uns also, dass man Kürzungen in Brüchen nur dann vornehmen kann, wenn man jeden Teil des Zählers sinnvoll durch den gesamten Nenner (oder aber durch Teiler dessen) teilen (bzw. kürzen) kann. Bei folgendem Beispiel ist das gut möglich:

$$\frac{4xy^2 - 8x^2y}{2xy} = \frac{4xy^2}{2xy} - \frac{8x^2y}{2xy} = 2y - 4x.$$

Wir behandeln nun **Aufgabe 6**.

Kapitel 3: Polynome dividieren

Eine wichtige Rechentechnik im Zusammenhang mit der Bruchrechnung ist die **Polynomdivision**. Wir werden in einem folgenden Abschnitt genauer auf den Begriff des Polynoms eingehen und uns hier zunächst auf die Ihnen aus der Schule bekannten Polynomfunktionen zweiten, dritten und vierten Grades beschränken. Da die Polynomdivision mit der schriftlichen Division aus der Grundschule verwandt ist, wollen wir diese durch ein Beispiel auffrischen. Sie wissen noch aus der Unterstufe, dass man bei der Aufgabe

$$60088 : 74$$

beim Dividenten 60088 von links nach rechts die Ziffernfolge durchgeht, bis man eine Zahl hat, die zumindest einmal durch den Divisor 74 teilbar ist. Da weder die 6 noch die 60 einmal vollständig durch 74 teilbar sind, nehmen wir die 600, die zwar nicht exakt durch 74 teilbar ist, aber in der diese Zahl zumindest 8-mal vollständig steckt ($8 \cdot 74 = 592$). Diese 8 bildet den Anfang des Ergebnisses:

$$60088 : 74 = 8_$$

Wir multiplizieren nun die 8 mit der 74, schreiben das Ergebnis von 592 unter die 600 aus der Zahl 60088 und bilden die Differenz aus 600 und 592, also 8. Anschließend ziehen wir die erste 8 auf dieselbe Zeile und erhalten zusammen 88. Da 88 dividiert durch 74 gerade 1 (mit einem Rest) ergibt, notieren wir diese 1 in das Ergebnis:

$$60088 : 74 = 81_$$

Wir rechnen rückwärts; 1 mal 74 ist 74 und schreiben diese 74 unter die 88. Die Differenz von 14 ergänzen wir um die zweite 8, die wir aus dem Dividenten 60088 holen, was 148 liefert. Diese 148 lässt sich restfrei durch 74 teilen und liefert 2. Damit sind wir (da es keinen Rest gibt) am Ende. Wir erhalten

$$60088 : 74 = 812.$$

Für den übersichtlichen Aufschrieb verweisen wir auf die Vorlesung und Übung. Dieses Prinzip funktioniert bei Polynomen genauso. Wir wollen

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 3)$$

berechnen. Wichtig ist bei jeder Aufgabe zunächst, dass man beide Polynome in der Reihenfolge absteigender Exponenten auflistet, so wie das hier bereits geschehen ist: zunächst der kubische Term x^3 , dann der quadratische Term $-6x^2$ und so weiter. Nachdem diese Vorbereitung erfolgt ist, kann es losgehen. Sie dividieren zunächst die jeweils ersten Summanden der beiden Polynome, die hier markiert sind, durch einander:

$$(\mathbf{x^3} - 6x^2 + 11x - 6) : (\mathbf{x} - 3) = x^2 \dots$$

Nun multiplizieren wir den gerade erhaltenen Ergebnisteil x^2 mit dem gesamten Divisor $x - 3$, was $x^3 - 3x^2$ liefert. Das schreiben wir unter den Teil $x^3 - 6x^2$ aus dem Dividenten und bilden eine Differenz:

$$x^3 - 6x^2 - (x^3 - 3x^2) = x^3 - 6x^2 - x^3 + 3x^2 = -3x^2.$$

Es ist dabei wichtig, dass Sie Klammern um das Polynom $x^3 - 3x^2$ setzen, um Fehler bei der Differenzenbildung zu vermeiden. Die Differenz von $-3x^2$ ergänzen sie um die $+11x$ aus dem Dividenten. Sie erhalten $-3x^2 + 11x$. Wiederum nehmen Sie den ersten Teil dieses Polynoms, also $-3x^2$, und dividieren diesen durch den ersten Teil des Divisors, also wieder durch x . Sie erhalten $-3x$ und ergänzen damit Ihr (Teil-)Ergebnis:

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 3) = x^2 - 3x \dots$$

Der letzte Schritt erfolgt analog zum vorherigen, nur dass wir jetzt $-3x$ mit $x - 3$ multiplizieren und $-3x^2 + 9x$ erhalten und dieses quadratische Polynom zunächst unter $-3x^2 + 11x$ schreiben. Wiederum bilden wir eine Differenz:

$$-3x^2 + 11x - (-3x^2 + 9x) = -3x^2 + 11x + 3x^2 - 9x = 2x.$$

$2x$ wird durch -6 aus dem Dividenten ergänzt. Wir dividieren folglich $2x$ durch x aus dem Divisor, erhalten 2 und ergänzen

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 3) = x^2 - 3x + 2.$$

Da $2 \cdot (x - 3) = 2x - 6$ liefert, ist die letzte Differenz 0 und die Aufgabe ist gelöst. Der Aufschrieb kann wie folgt aussehen. Beachten Sie, dass hier etwa direkt $-x^3 + 3x^2$ steht, das Minuszeichen bei $-(x^3 - 3x^2)$ also bereits verarbeitet wurde. Dann kann man übereinanderstehende Polynomteile addieren.

$$\begin{array}{r} (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 3) = x^2 - 3x + 2 \\ -x^3 + 3x^2 \\ \hline -3x^2 + 11x \\ 3x^2 - 9x \\ \hline 2x - 6 \\ -2x + 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

Analog behandeln wir in der Vorlesung die Beispiele

$$\begin{array}{r} (x^3 - 3x^2 - 25x + 75) : (x - 3) = x^2 - 25 \\ -x^3 + 3x^2 \\ \hline -25x + 75 \\ 25x - 75 \\ \hline 0 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{r} (x^5 + 4x^4 - 18x^3 - 64x^2 + 17x + 60) : (x^2 + 6x + 5) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12. \\ -x^5 - 6x^4 - 5x^3 \\ \hline -2x^4 - 23x^3 - 64x^2 \\ 2x^4 + 12x^3 + 10x^2 \\ \hline -11x^3 - 54x^2 + 17x \\ 11x^3 + 66x^2 + 55x \\ \hline 12x^2 + 72x + 60 \\ -12x^2 - 72x - 60 \\ \hline 0 \end{array}$$

Wir behandeln nun **Aufgabe 7**.

Wir wollen noch auf einige Sonderfälle zur Polynomdivision eingehen. Nicht immer erhalten Sie beim Abschluss eine Differenz von 0 , sondern einen Rest, den Sie nicht mehr vollständig durch den Divisor teilen können. Etwa bei der Aufgabe

$$\begin{array}{r} (x^3 + 6x^2 - 51x - 280) : (x^2 - 15x + 56) = x + 21 + \frac{208x - 1456}{x^2 - 15x + 56} \\ -x^3 + 15x^2 - 56x \\ \hline 21x^2 - 107x - 280 \\ -21x^2 + 315x - 1176 \\ \hline 208x - 1456 \end{array}$$

entsteht die Situation, dass Sie letztlich die Differenz $208x - 1456$ erhalten. Es handelt sich um eine Polynomfunktion ersten Grades, der Divisor besitzt jedoch den (größeren) Grad zwei. Das zeigt Ihnen, dass eine Situation vorliegt, bei der ein Rest entsteht. Sie sehen bereits an der Notation des

Endergebnisses, dass damit einfach umgegangen werden kann: Sie addieren zum bisherigen Teilergebnis schlichtweg einen Bruch, dessen Zähler die besagte Differenz und dessen Nenner der Divisor aus der Aufgabe ist. Weitere Beispiele hierzu sind Bestandteil der Übungen.

Andererseits kann es passieren, dass in einer Aufgabe zur Polynomdivision weitere Variablen auftauchen, wie etwa bei

$$(ax^3 + ax^2 + bx^2 + ax + bx + b) : (x^2 + x + 1).$$

Auch bei einer solchen Aufgabe ändert sich das grundlegende Lösungsprinzip nicht. Betrachten Sie den Dividenten einfach weiterhin als ein Polynom von x , dessen Koeffizienten von den Parametern a und b abhängen. Sie können dieses Polynom auch mittels

$$ax^3 + ax^2 + bx^2 + ax + bx + b = ax^3 + (a+b)x^2 + (a+b)x + b$$

umschreiben und lösen

$$(ax^3 + (a+b)x^2 + (a+b)x + b) : (x^2 + x + 1) = ax + b$$

mit der bewährten Methode (siehe Vorlesung). Regelmäßig hängt dann auch das Endergebnis von den Ausgangsparametern ab.

Kapitel 4: Polynomfunktionen

Wir wollen den Begriff des **Polynoms** nun genauer behandeln. Polynome sind besondere Funktionen. Jede Funktion besitzt einen Namen, üblicherweise einen Kleinbuchstaben wie z.B. f oder p und die Eigenschaft, dass Sie gemäß einer Vorschrift einem **Argument** x aus einer **Definitions Menge** D einen **Funktionswert** y aus einer **Wertemenge** W zuweisen. Das notiert man oft durch

$$p : D \rightarrow W, \quad x \mapsto p(x),$$

wobei $p(x)$ ein (in der Regel) von x abhängiger Funktionsterm ist. Die obige Notation gibt Ihnen also auch stets Auskunft über den Bereich der Argumente D , für den man die Funktion untersucht. Bei Polynomfunktionen kann man stets problemlos $D = \mathbb{R}$ setzen. Nicht immer *muss* man den maximalen Definitionsbereich zugrundelegen.

Zu den einfachsten Polynomen zählen die Basismonome, deren Funktionsterme durch $p(x) = x^n$ für einen Exponenten $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ gegeben sind. Zum Beispiel gehören die Zuordnungen

$$x \mapsto x^0 = 1, \quad x \mapsto x^1 = x, \quad x \mapsto x^2, \quad x \mapsto x^3 \text{ usw.}$$

zu den Basismonomen. Ein **Monom** ist nun jedes Vielfache eines Basismonoms, also etwa die Funktionen

$$p_1(x) = 3x^5, \quad p_2(x) = -7x^4 \quad \text{oder} \quad p_3(x) = \frac{x}{3}.$$

Das Wort *Monom* beinhaltet den Bestandteil *mono*, der auf einen einteiligen Funktionsterm hindeutet. Ein *Polynom* ist nun eine endliche Summe beliebiger Monome. Ein allgemeines Polynom über $\mathbb{R}$ ist eine Funktion $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Darstellung

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k$$

mit reellen **Koeffizienten** $a_0, a_1, \dots, a_n$ und einem $n \in \mathbb{N}_0$. Die Summendarstellung mit dem Summenzeichen Σ ist üblich; wir widmen dieser Schreibweise eine Vorlesung in der zweiten Vorkurswoche. Der **Grad** ist eine wichtige Kennzahl eines Polynoms. Sie entspricht stets dem größten Exponenten eines Monoms mit Koeffizienten $\neq 0$. Falls man in der obigen allgemeinen Polynomdarstellung $a_n \neq 0$ voraussetzt, dann hat p den Grad n , was man auch

$$\deg p = n \quad \text{oder} \quad \text{grad } p = n$$

schreibt. Dabei steht *deg* für das englische Wort *degree*, was wiederum mit *Grad* übersetzt werden kann.

Polynome nullten Grades entsprechen gerade den **konstanten Funktionen**

$$p(x) = a_0 = a, \quad \text{mit } a \neq 0.$$

Auch bei $p(x) = 0$ handelt es sich um ein Polynom, nämlich um das Nullpolynom, dessen Grad man auf $-\infty$ festlegt. Zeichnet man sie in ein Koordinatensystem, so erhält man als Graph eine zur x -Achse parallele Gerade.

Polynome ersten Grades sind die **linearen Funktionen**

$$p(x) = a_0 + a_1x = a + bx \quad \text{mit } b \neq 0.$$

Die zugehörigen Graphen sind wiederum Geraden, die aber nicht parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen.

Polynome zweiten Grades sind die quadratischen Funktionen

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 = a + bx + cx^2 \quad \text{mit } c \neq 0.$$

Ihre Schaubilder nennt man Parabeln.

Polynome dritten Grades nennt man auch kubische Funktionen, **Polynome vierten Grades** quartische Funktionen.

Wir behandeln nun **Aufgabe 8**.

Wir diskutieren nun die Möglichkeiten zur Berechnung der **Polynomnullstellen**. Bekanntlich ist eine Nullstelle $x \in D$ einer Funktion f ein Element ihres Definitionsbereichs, für welches $f(x) = 0$ gilt. Nullstellenberechnungen führen also immer auf eine zu lösende Gleichung, in diesem Fall auf eine **Polynomgleichung**. Ein Polynom n -ten Grades besitzt maximal n verschiedene Nullstellen. Es können jedoch auch weniger sein. Besitzt p die n reellen Nullstellen $x_1, x_2, \dots, x_n$, so kann man das Polynom p , welches in allgemeiner Darstellung

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$$

gegeben sei, auch durch die Gleichung

$$p(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

angeben. Diese Schreibweise nennt man **Linearfaktorzerlegung** des Polynoms p . Es handelt sich dabei um eine Darstellung von p in Produktform, wobei der führende Koeffizient a_n multipliziert wird mit linearen Polynomen der Form $(x - x_i)$, wobei x_i gerade die i -te Nullstelle ist. Beispielsweise besitzt

$$p(x) = 3x^3 - 12x^2 - 396x + 2160$$

die drei Nullstellen $x_1 = 6, x_2 = 10$ und $x_3 = -12$, wie man durch Einsetzen belegen kann. Damit lautet die zugehörige Linearfaktorzerlegung

$$p(x) = 3(x - 6)(x - 10)(x + 12).$$

Natürlich erhält man die Zerlegung erst durch Bestimmung der Nullstellen, allerdings kann man, wenn man die Zerlegung bereits gegeben hat, die Nullstellen sofort ablesen. Etwas unintuitiv mag es erscheinen, dass die Nullstellen scheinbar mit *verkehrtem* Vorzeichen in der Zerlegung auftauchen. Dabei handelt es sich um keinen Irrtum, denn zur Nullstelle x_0 gehört stets der Linearfaktor $(x - x_0)$. Es ist zu beachten, dass die Nullstellen $x_1, \dots, x_n$ nicht paarweise verschieden sein müssen. Man

spricht auch von **mehrfachen Nullstellen**, beispielsweise von doppelten oder dreifachen Nullstellen. Diese Angabe bezieht sich stets auf den Exponenten in der Linearfaktorzerlegung. Beispielsweise ist im Polynom

$$p(x) = (x - 3)^4(x + 2)^9$$

$x_1 = 3$ eine vierfache und $x_2 = -2$ sogar eine neunfache Nullstelle. Nicht immer besitzt ein Polynom über den reellen Zahlen eine vollständige Linearfaktorzerlegung. Zwar gehört zu jeder Nullstelle stets auch ein Linearfaktor, aber es gibt mitunter nicht immer ausreichend reelle Nullstellen, sodass p oft nur als Produkt von linearen und quadratischen Termen geschrieben werden kann, bei dem die quadratischen Terme keine weiteren reellen Nullstellen haben. Abhilfe schafft hier die Erweiterung auf den Zahlenraum der komplexen Zahlen, die im Studium vollzogen wird.

Polynome nullten Grades haben keine Nullstellen.

Polynome ersten Grades haben stets exakt eine Nullstelle, die durch Lösung einer linearen Gleichung erhalten werden kann.

Polynome zweiten Grades haben keine, eine oder zwei Nullstellen, die man z.B. über die bekannte p - q -Formel ermitteln kann.

Polynome dritten Grades haben stets mindestens eine reelle Nullstelle, können aber auch zwei oder drei Nullstellen haben. Üblicherweise benötigt man zunächst eine Nullstelle, z.B. durch geschicktes Raten und reduziert den Polynomgrad mittels Polynomdivision dann um 1, um den verbleibenden quadratischen Teil mit Lösungsformeln zu bearbeiten.

Polynome höheren Grades können mehrere Nullstellen haben. Wiederum ist man darauf angewiesen, einige Nullstellen zu erraten, bis man mit einer Polynomdivision schließlich einen quadratischen Restterm erhält. Lösungsformeln existieren ab einem gewissen Polynomgrad nicht mehr.

Möchte man die Nullstellen von

$$p(x) = -4x^2 - 12x + 40$$

bestimmen, so kann man entweder direkt die sogenannte a - b - c -Formel verwenden, oder aber man formt noch um:

$$-4x^2 - 12x + 40 = 0 \iff x^2 + 3x - 10 = 0,$$

indem man durch den führenden Koeffizienten -4 teilt. Die **p - q -Formel** ist anwendbar, wenn man eine quadratische Gleichung der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

vorliegen hat. Sofern es Lösungen gibt, erhält man diese über die Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Ihnen ist sicherlich noch aus der Schule bekannt, dass Sie abhängig vom Wert der sogenannten Diskriminanten $\frac{p^2}{4} - q$ keine, genau eine oder zwei Lösungen erhalten. Eine Anwendung auf unser Beispiel mit $p = 3$ und $q = -10$ liefert

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{3^2}{4} + 10} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{7}{2},$$

und damit die Lösungen und Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = -5$.

Die Nullstellenbestimmung bei kubischen Polynomen der Form

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

setzt in der Praxis voraus, dass Sie eine Nullstelle leicht ermitteln können. Es existieren zwar Lösungsformeln für viele Fälle kubischer Gleichungen, diese sind jedoch nicht elementar. Angenommen, Sie würden bereits wissen, dass x_1 eine Nullstelle ist, dann wäre Ihnen bekannt, dass p den Linearfaktor $(x - x_1)$ besitzt, also eine Darstellung der Form

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = (x - x_1) \cdot q(x)$$

hat, bei der q ein noch unbekanntes quadratisches Polynom ist, das möglicherweise wieder in zwei Linearfaktoren zerfällt. Wenn q bekannt wäre, dann würde aus der Produktschreibweise für p folgen, dass die Nullstellen von q auch Nullstellen von p sind. Nun gelangt man aber offensichtlich zu q , indem man p durch seinen Linearfaktor $(x - x_1)$ dividiert. Wir müssen also die Polynomdivision

$$(x^3 + ax^2 + bx + c) : (x - x_1) = q(x)$$

vollziehen. Da q quadratisch sein muss, kann man dann die Lösungsformel auf $q(x) = 0$ anwenden und erhält alle übrigen Nullstellen. Das hier allgemein beschriebene Verfahren greift auch dann, wenn man die Gleichung

$$\alpha x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

mit dem führenden Koeffizienten $\alpha \neq 0$ zu lösen hat. Dividiert man zunächst durch α , so ist man wieder im behandelten Fall.

Es stellt sich nun die Frage, wie man möglichst geschickt eine erste Nullstelle erraten kann. Nehmen wir für diese Frage kurz an, das kubische Polynom p hätte die Nullstellen x_1, x_2 und x_3 und damit die Darstellung

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Multipliziert man dies aus und vergleicht sie mit der zu Beginn gegebenen Darstellung, erhält man

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 \\ &= x^3 + ax^2 + bx + c. \end{aligned}$$

Gemäß einem Satz aus der Algebra sind zwei Polynome genau dann identisch, wenn ihre Koeffizienten übereinstimmen. Widmen wir uns dem sogenannten **Absolutglied**, also dem Koeffizienten vor $x^0 = 1$. Dort haben wir einmal $-x_1x_2x_3$ und zum anderen c , und beide Werte müssen übereinstimmen, es muss also

$$-x_1x_2x_3 = c$$

gelten. Wir können das in die wichtige Erkenntnis übersetzen, dass das Negative des Produktes der drei Nullstellen mit dem Absolutglied des Polynoms übereinstimmen muss. Wenn man weiß, dass alle Nullstellen ganzzahlig sind, dann sind diese also stets **Teiler des Absolutglieds**. Beispielsweise hat das Polynom

$$p(x) = x^3 - 4x^2 - 17x + 60$$

drei ganzzahlige Nullstellen (- eine Information, die Ihnen ein Klausurensteller z.B. mitgeteilt haben kann). Diese müssen sich zwangsläufig unter den Teilern des Absolutglieds 60 befinden, also unter der Menge von Zahlen

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 20, \pm 30, \pm 60.$$

Beachten Sie bitte unbedingt, dass auch negative Zahlen Teiler sein können. Erstmals fündig werden Sie bei $x_1 = 3$, denn $p(3) = 0$. Die weiteren Nullstellen erhalten Sie unter Ausnutzung der folgenden Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} (x^3 - 4x^2 - 17x + 60) : (x - 3) = x^2 - x - 20 \\ \underline{-x^3 + 3x^2} \\ -x^2 - 17x \\ \underline{x^2 - 3x} \\ -20x + 60 \\ \underline{20x - 60} \\ 0 \end{array}$$

Die Nullstellen von $q(x) = x^2 - x - 20$ ergeben sich mit der p - q -Formel zu $x_2 = -4$ und $x_3 = 5$.

Wir behandeln nun **Aufgabe 9**.

Polynome vierten Grades können jede Anzahl von Nullstellen zwischen 0 und 4 besitzen. Gibt es die vier Nullstellen x_1, x_2, x_3, x_4 des Polynoms

$$p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

so kann p bekanntlich durch

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

dargestellt werden. In Anlehnung an unsere Erkenntnis bei kubischen Polynomen gilt hier

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = d.$$

Produkt der Nullstellen und Absolutglied des Polynoms stimmen hier also sogar überein. Das bedeutet, dass bei ganzzahligen Nullstellen diese wiederum Teiler des Absolutgliedes sind. Es sind also prinzipiell zwei Wege für die Nullstellenermittlung bei quartischen Polynomen denkbar:

Weg 1: Errate die Nullstelle x_1 , dividiere p durch den Linearfaktor $(x - x_1)$ und erhalte den kubischen Rest q , dessen Nullstellen wie gehabt bestimmt werden (erneutes Raten mit anschließender Polynomdivision).

Weg 2: Errate die Nullstellen x_1 und x_2 , dividiere p durch das Produkt der Linearfaktoren $(x - x_1)(x - x_2)$ und erhalte den quadratischen Rest q , der mit der Lösungsformel behandelt werden kann.

Der Weg 2 ist sicherlich der kürzere, denn er benötigt nur eine aufwendige Polynomdivision. Allerdings erfordert er *doppeltes Rateglück* zu Beginn. Wir wollen die Nullstellen von

$$p(x) = x^4 + x^3 - 31x^2 - x + 30$$

bestimmen. Durch Probieren gelangt man recht zügig zu $p(-1) = 0$ und $p(1) = 0$. Das Produkt der Linearfaktoren zu diesen beiden Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ ergibt sich zu

$$(x - x_1)(x - x_2) = (x + 1)(x - 1) = x^2 - 1.$$

Wir dividieren also

$$\begin{array}{r} (x^4 + x^3 - 31x^2 - x + 30) : (x^2 - 1) = x^2 + x - 30 \\ \underline{-x^4 \qquad \qquad + x^2} \qquad \qquad \qquad \\ x^3 - 30x^2 - x \qquad \qquad \qquad \\ \underline{-x^3 \qquad \qquad + x} \qquad \qquad \qquad \\ -30x^2 \qquad \qquad + 30 \qquad \qquad \qquad \\ \underline{30x^2 \qquad \qquad - 30} \qquad \qquad \qquad \\ 0 \end{array}$$

und kommen mit Hilfe der p - q -Formel auf die weiteren Nullstellen $x_3 = 5$ und $x_4 = -6$.

Unter den quartischen Gleichungen kommt den sogenannten **biquadratischen Gleichungen** eine besondere Rolle zu. Es handelt sich um Gleichungen der Form

$$\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0.$$

Grundsätzlich ist die obige Lösungstheorie wiederum anwendbar, es gibt jedoch eine schnellere Lösungsmethode unter Verwendung einer Substitution. Wir beobachten, dass wir die linke Seite wie folgt umschreiben können:

$$\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = \alpha(x^2)^2 + \beta(x^2)^1 + \gamma(x^2)^0,$$

was es uns erlaubt, die gegebene Gleichung als eine quadratische Gleichung in x^2 zu verstehen. Setzen wir einfach $z = x^2$, dann wird aus der eigentlich quartischen Gleichung die quadratische Gleichung

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0,$$

die mit der Formel gelöst werden kann. Das führt auf bis zu zwei Lösungen z_1 und z_2 . Negative Lösungen müssen wir nicht weiter berücksichtigen, denn es müsste ja $z_{1/2} = x^2$ gelten, und x^2 ist stets mindestens Null. Erhält man $z_1 = 0$ oder $z_2 = 0$, dann ist offenbar auch $x = 0$ eine Lösung der biquadratischen Gleichung. Ist hingegen $z_1 > 0$, dann sind wegen $z_1 = x^2$ sowohl $x_1 = \sqrt{z_1}$ als auch $x_2 = -\sqrt{z_1}$ Lösungen der Ausgangsgleichung. Analoges gilt im Fall $z_2 > 0$.

Wir wollen diese Lösungstheorie auf die Gleichung

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0$$

anwenden, die über die Standardsubstitution $z = x^2$ auch

$$z^2 - 7z + 12 = 0$$

geschrieben werden kann. Man erhält $z_1 = 3$ und $z_2 = 4$ und damit über die Rücksubstitution einerseits $z_1 = 3 = x^2$, also $x_1 = \sqrt{3}$ und $x_2 = -\sqrt{3}$, und andererseits $z_2 = 4 = x^2$ und damit $x_3 = 2$ und $x_4 = -2$. Insbesondere sind wir bei biquadratischen Gleichungen auch nicht darauf angewiesen, dass ganzzahlige Nullstellen vorliegen. Leider kann man diesen Weg nur gehen, wenn auch wirklich eine Gleichung in der biquadratischen Form vorliegt!

Wir behandeln nun **Aufgabe 10**.

Kapitel 5: Wurzelrechnung

Wir erinnern uns, dass wir zu Beginn eine Potenz der Form $a^n = b$ mit $n \in \mathbb{N}$ im Hinblick auf 3 Situationen untersucht haben. Sind a und n bekannt, dann erhält man c durch das Potenzieren. Wir wechseln nun den Blickpunkt auf die Situation, dass wir zwar den Potenzwert b und den Exponenten n kennen, nicht jedoch die Basis a . Diese erhält man durch Radizieren, bzw. durch das **Ziehen der n-ten Wurzel**. Das nehmen wir zum Anlass, die Gesetzmäßigkeiten von Wurzeln näher zu beleuchten.

Setzen wir $a, b \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ voraus, so können wir $a = \sqrt[n]{b}$ schreiben. Genauer gesagt ist $\sqrt[n]{b}$ genau dann gleich a , wenn $a^n = b$. Für den Fall $n = 1$ hat man es nicht wirklich mit einer Wurzel zu tun, man schreibt einfach $a = b$. Im Falle $n = 2$ hat man

$$a = \sqrt[2]{b} = \sqrt{b},$$

und damit den wichtigen Spezialfall der **Quadratwurzel** von b . Die Zahl n nennt man auch **Wurzelexponent**. Ihn mitzuschreiben darf nur dann unterbleiben, wenn man auch wirklich die Quadratwurzel meint. Die Zahl b heißt **Radikand**. Auch höhere Wurzeln sind Ihnen sicherlich geläufig:

$$\sqrt[5]{32} = 2, \quad \text{denn} \quad 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32,$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}, \quad \text{denn} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27},$$

$$\sqrt{65536} = 256, \quad \text{denn} \quad 256^2 = 65536.$$

Wir haben uns zwar anfänglich auf $a, b \geq 0$ beschränkt, man könnte sich aber dennoch die Frage stellen, warum eine Rechnung wie

$$\sqrt[3]{-8} = -2, \quad \text{denn} \quad (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

nicht zugelassen sein sollte. Dazu sei zunächst gesagt, dass die Behandlung von (ungeradzahlig) Wurzeln aus negativen Zahlen nicht einheitlich erfolgt. Das Hauptargument gegen eine Ausdehnung auf negative Radikanden liegt darin, dass die Gültigkeit gewisser Rechengesetze eingeschränkt werden müsste. Wir werden uns mit den Wurzelgesetzen in Kürze befassen, aber eine unvorsichtige Ausdehnung dieser auf negative Argumente würde zu Widersprüchen wie

$$-2 = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{8^2} = \sqrt[3]{8} = 2$$

führen. Andererseits kann man durchaus argumentieren, dass die Polynomfunktion $x \mapsto x^3$ auf ihrem gesamten Definitionsbereich $\mathbb{R}$ umkehrbar ist und diese Umkehrfunktion zumindest für $x \geq 0$ auch mit der Funktion $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ übereinstimmt. Auf diese Weise könnte man eine Einführung der dritten Wurzel aus negativen Zahlen rechtfertigen. Wir gehen diesen Weg jedoch nicht und fordern für alle Argument von Wurzelfunktionen, dass diese nichtnegativ sind.

Analog zu den Potenzen behandeln wir nun die **Wurzelgesetze** im Einzelnen. Dabei seien zunächst $x, y \geq 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$. Bei Produkten von Wurzeln mit gleichem Wurzelexponenten und verschiedenen Radikanden kann man letztere multiplizieren:

$$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}, \quad \text{z.B.} \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6.$$

Dividieren wir solche Wurzeln, müssen wir zunächst $y \neq 0$ fordern. Es gilt

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}, \quad \text{z.B.} \quad \frac{\sqrt[3]{256}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{256}{4}} = \sqrt[3]{64} = 4.$$

Man kann Wurzeln auch iterieren, also die Wurzel aus Wurzeln ziehen. Dabei multipliziert man die Wurzelexponenten wie folgt:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x} \quad \text{z.B.} \quad \sqrt{\sqrt[5]{1024}} = \sqrt[10]{1024} = 2$$

Das folgende Gesetz kennen wir schon; es behandelt Potenzen mit rationalem Exponenten und deren Umwandlung in Wurzeln.

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m \quad \text{z.B.} \quad 16^{3/2} = \sqrt{16^3} = (\sqrt{16})^3 = 64$$

Auch negative rationale Exponenten kommen vor:

$$x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{x})^m} \quad \text{z.B.} \quad 4^{-1/2} = \frac{1}{4^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

Die Umwandlungen der Terme $x^{1/2}$ und $\sqrt{x}$ ineinander tauchen besonders regelmäßig auf. Es ist wichtig, dass wir intuitiv mit Wurzeln umgehen können.

Wir behandeln nun **Aufgabe 11**.

Bei Brüchen, in denen Wurzeln im Nenner auftauchen, versucht man häufig, diese *rational zu machen*, sodass also keine Wurzeln mehr in ihm auftauchen. Dies geschieht oft durch Erweiterung des Bruches mit Hilfe der Binomischen Formeln. Den Nenner bei

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

kann man wurzelfrei schreiben, indem man den Bruch mit dem gesamten Nenner erweitert:

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac{1}{\sqrt{x+2}} \cdot \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{x+2}}{x+2}.$$

Die folgenden Zahlen schreibt man mit Hilfe der dritten Binomischen Formel ohne Wurzeln im Nenner:

$$\frac{1}{1-\sqrt{2}} = \frac{1}{1-\sqrt{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot (1+\sqrt{2})}{1^2 - (\sqrt{2})^2} = -1 - \sqrt{2}$$

Dieser Trick funktioniert auch bei Summen mit zwei Wurzeln im Nenner:

$$\frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{3 - 5} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

Wir behandeln nun **Aufgabe 12.**

Die **Wurzelfunktion**

$$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

kann nur für nichtnegative Argumente definiert werden. Es handelt sich um die **Umkehrfunktion** der Normalparabel $x \mapsto x^2$ im Bereich $x \in [0, \infty)$. Es ist eine Eigenschaft zweier Funktionen, die die Umkehrfunktion der jeweils anderen sind, dass sie, wenn man sie ineinander einsetzt, wieder das Ausgangsargument liefern: Für ein beliebiges $x \geq 0$ gelten sowohl

$$\sqrt{x^2} = x \quad \text{als auch} \quad (\sqrt{x})^2 = x.$$

Nun hatten wir festgehalten, dass man Argumente in die Wurzelfunktion einsetzen kann, sofern diese mindestens Null sind. Der Term x^2 ist nie negativ, auch wenn x negativ ist. Folglich ist der Term $\sqrt{x^2}$ für jedes x wohldefiniert. Es ist jedoch Vorsicht geboten. Im Allgemeinen gilt **nicht** $\sqrt{x^2} = x$. Sei etwa $x = -2$, dann haben wir

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = -x.$$

Für negative x gilt also $\sqrt{x^2} = -x$. Im Allgemeinen schreibt man

$$\sqrt{x^2} = |x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}.$$

Die Funktion $|\cdot|$ nennt man **Betragsfunktion**. Sie liefert für ein beliebiges Argument aus $\mathbb{R}$ stets dessen Abstand zur Zahl 0 auf der Zahlengerade. Da Abstände nie negativ sind, ist es der Betrag einer Zahl auch nicht.

Das Ziehen der Quadratwurzel und das Bilden des Quadrates sind also **Umkehroperationen** für nichtnegative Argumente. Dies nutzt man auch beim Lösen von **Wurzelgleichungen** aus. Wir suchen die Lösungsmenge von

$$\sqrt{7x+2} - 3\sqrt{x+7} = -5.$$

Dafür bestimmen wir zunächst den Definitionsbereich der linken Seite. In beiden Wurzeln taucht die gesuchte Variable x auf. Damit $\sqrt{7x+2}$ sinnvoll definiert werden kann, muss $7x+2 \geq 0$ und damit $x \geq -2/7$ gelten. Andererseits ist $\sqrt{x+7}$ für alle x mit $x+7 \geq 0$ bzw. $x \geq -7$ erfüllt. Damit beide Wurzeln definiert sind, müssen beide Voraussetzungen erfüllt sein. Da $x \geq -2/7$ stets $x \geq -7$ nach sich zieht, ist die Gleichung gerade für

$$x \geq -\frac{2}{7}$$

sinnvoll gestellt. Um die Wurzeln aufzulösen, quadrieren wir beide Seiten der Gleichung, Das führt zunächst auf

$$(\sqrt{7x+2} - 3\sqrt{x+7})^2 = (-5)^2.$$

Das Quadrat auf der linken Seite muss mit Hilfe der Binomischen Formeln umgeformt werden, da eine Differenz quadriert wird. Man erhält

$$7x+2 - 6\sqrt{7x+2}\sqrt{x+7} + 9(x+7) = 25,$$

was zunächst zu

$$-6\sqrt{7x+2}\sqrt{x+7} = -16x - 40$$

umgeformt werden kann. Nun ist eine erneute Quadratur auf beiden Seiten vonnöten. Wiederum ist eine Binomische Formel zu verwenden, dieses Mal jedoch auf der rechten Seite:

$$(-6\sqrt{7x+2}\sqrt{x+7})^2 = (-16x-40)^2 \implies 36(7x+2)(x+7) = 256x^2 + 1280x + 1600$$

Man hat eine wurzelfreie Gleichung erhalten, die letztlich (nach Ausmultiplikation und Sammlung der Terme auf der rechten Seite) auf die quadratische Gleichung

$$0 = x^2 - 139x + 274$$

zurückführt. Diese hat die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 137$. Bei Wurzelgleichungen ist es grundsätzlich erforderlich, eine Probe durchzuführen. Einerseits erhalten wir

$$\sqrt{7 \cdot 2 + 2} - 3\sqrt{2 + 7} = \sqrt{16} - 3\sqrt{9} = 4 - 3 \cdot 3 = -5$$

und andererseits

$$\sqrt{7 \cdot 137 + 2} - 3\sqrt{137 + 7} = \sqrt{961} - 3\sqrt{144} = 31 - 3 \cdot 12 = -5.$$

Somit sind beide Zahlen auch Lösung der zu Beginn gegebenen Wurzelgleichung. Es ist zu berücksichtigen, dass das Quadrieren einer Gleichung auf beiden Seiten grundsätzlich **keine Äquivalenzumformung** ist, also insbesondere, dass falsche Aussagen nach der Quadratur nicht unbedingt falsche Aussagen bleiben. Quadriert man die absurde Gleichung $-2 = 2$ auf beiden Seiten, so kommt die wahre Aussage $4 = 4$ heraus. Aus falsch wurde wahr. Oder nehmen Sie an, Sie hätten die Gleichung

$$\sqrt{x} = -2$$

zur Lösung erhalten. Offensichtlich hat sie keine reelle Lösung, denn Wurzeln sind stets mindestens Null. Quadriert man auf beiden Seiten, so würde man

$$x = 4$$

erhalten und hätte damit eine Gleichung mit einer Lösung $x = 4$, die einer Probe aber nicht standhalten würde, denn offenbar gilt $\sqrt{4} = 2$.

Kapitel 6: Logarithmus- und Exponentialfunktion

Wir kommen nun zur letzten der zu Beginn angesprochenen Situationen, nämlich zu der Frage, wie man bei

$$a^x = b,$$

wenn die Basis a und der Potenzwert b bekannt sind, an den Exponenten x gelangt. Dies erfordert Kenntnisse zur Technik des **Logarithmierens**. Wir müssen zunächst $a, b > 0$ und $a \neq 1$ voraussetzen. Wir schreiben

$$x = \log_a b$$

genau dann, wenn $a^x = b$. Wir beginnen mit einigen Rechenbeispielen:

$$\log_5 125 = 3, \quad \text{denn} \quad 5^3 = 125,$$

$$\log_2 \frac{1}{4} = -2, \quad \text{denn} \quad 2^{-2} = \frac{1}{4},$$

$$\log_{10} 0.0001 = -4, \quad \text{denn} \quad 10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000} \quad \text{und}$$

$$\log_e \sqrt{e} = \frac{1}{2}, \quad \text{denn} \quad e^{1/2} = \sqrt{e}.$$

Die Zahl e wird auch **Eulersche Zahl** genannt. Ihr bekommt als Basis des **natürlichen Logarithmus** eine besondere Bedeutung bei. Es gibt weitere Logarithmenbasen, die aufgrund ihrer häufigen Anwendung besondere Formelzeichen erhalten. Die Basis $a = 2$ führt auf den sogenannten **binären Logarithmus**. Man schreibt dafür abkürzend

$$\text{lb } x := \log_2 x.$$

Das Mitschreiben der Basis wird also unterlassen, dafür verwendet man statt $\log_2$ direkt lb . Zum Beispiel ist

$$\text{lb } 512 = 9, \quad \text{denn} \quad 2^9 = 512.$$

Den Logarithmus zur Basis $a = 10$ nennt man auch **dekadischen Logarithmus**. Für diesen schreibt man

$$\lg x := \log_{10} x.$$

Es ist etwa

$$\lg 0.01 = -2, \quad \text{denn} \quad 10^{-2} = 0.01.$$

Über die Basis $a = e$ hatten wir bereits gesprochen. Wir setzen

$$\ln x := \log_e x$$

und berechnen damit

$$\ln \frac{1}{e} = -1, \quad \text{denn} \quad e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Wir werden die Eulersche Zahl erneut bei der Behandlung der Exponentialfunktion untersuchen. Ihre mathematisch präzise Einführung ist gar nicht so einfach und verlangt Mittel, die erst im Studium vollständig zur Verfügung stehen. Wir möchten an dieser Stelle einen Überblick über die möglichen Zugänge geben. Dabei muss es Sie nicht entmutigen, wenn Sie sie noch nicht ganz verstehen. Eine Möglichkeit besteht darin, die Eulersche Zahl als unendliche Summe

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots$$

einzuführen. Man kann numerisch begründen, dass etwa $e \approx 2.718$ gelten muss. Eine andere Möglichkeit ist es, den Grenzwert einer besonderen Zahlenfolge zu betrachten. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Mit dieser Beziehung haben Sie die Möglichkeit, Näherungen für e zu erhalten, indem Sie große Zahlen für das Argument n in die Bildungsvorschrift der Folge einsetzen. Man erhält etwa

$$\left(1 + \frac{1}{1000000}\right)^{1000000} = 2.718280469 \dots$$

und damit eine Näherung für die Eulersche Zahl mit bereits fünf korrekten Nachkommastellen. Große Bedeutung haben die Eulersche Zahl und die Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$, die sie als Basis hat, in der Differentialrechnung, denn sie ist die einzige Funktion (abgesehen von der Nullfunktion), die beim Ableiten ihren Funktionsterm nicht ändert. Es gilt

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x.$$

Keine andere Basis kann das leisten. All dies soll Ihnen einen Eindruck verschaffen, warum es sich lohnt, den natürlichen Logarithmus mit seiner prominenten Basis e mit einem besonderen Formelzeichen zu versehen.

Wir behandeln nun **Aufgabe 13**.

Zwischen zwei Logarithmen mit verschiedenen Basen können Verbindungen hergestellt werden, die es Ihnen erlauben, einen Logarithmus mit der Basis a in einen anderen mit der Basis $c > 0, c \neq 1$, umzuschreiben. Wir befinden uns in der Situation, dass wir einen Logarithmus

$$\log_a b$$

gegeben haben und einen Logarithmus zur Basis c wollen, also das $\boxed{?}$ in

$$\log_a b = \log_c \boxed{?}$$

mit einem Term ersetzen wollen. Dabei hilft uns die Beziehung

$$a = c^{\log_c a}.$$

Beachten Sie, dass das Ergebnis von $\log_c a$ gerade der Exponent ist, der, wenn man ihn an c setzt, a liefert. Wenn $x = \log_a b$, so muss folglich

$$a^x = b \implies \left(c^{\log_c a}\right)^x = b \implies c^{x \cdot \log_c a} = b$$

gelten. Wir wenden nun auf beiden Seiten der letzten Gleichung den Logarithmus zur Basis c an, was

$$\log_c \left(c^{x \cdot \log_c a}\right) = \log_c b \implies x \log_c a = \log_c b \implies x = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

liefert. Da nun aber $x = \log_a b$ war, haben wir die wichtige Beziehung

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

gezeigt. Zur Anwendung: Beim Logarithmus $\log_a b$ können Sie einfach die Basis a durch die Basis c austauschen, sofern Sie anschließend noch durch den Logarithmus $\log_c a$ teilen. Beispielsweise würden wir den Logarithmus $\log_4 8$ gerne zur Basis $c = 2$ schreiben, denn sowohl 4 als auch 8 sind Zweierpotenzen. Mit obiger Formel gilt nun

$$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2}, \quad \text{denn} \quad 4^{3/2} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8.$$

Oder aber Sie wenden die Formel rückwärts an:

$$\frac{\lg 49}{\lg 7} = \frac{\log_{10} 49}{\log_{10} 7} = \log_7 49 = 2.$$

Wir wollen schließlich einen Überblick über die **Logarithmengesetze** geben, die uns das Rechnen erleichtern. Man addiert und subtrahiert Logarithmen zu gleichen Basen, indem man die Argumente multipliziert bzw. dividiert. So gilt einerseits für $a, b, c > 0$ und $a \neq 1$

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c), \quad \text{z. B.} \quad \log_4 2 + \log_4 32 = \log_4 (2 \cdot 32) = \log_4 64 = 3$$

und andererseits

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right), \quad \text{z. B.} \quad \ln(8e^4) - \ln(8\sqrt{e}) = \ln\left(\frac{8e^4}{8\sqrt{e}}\right) = \ln e^{7/2} = \frac{7}{2}.$$

Ist das Argument eines Logarithmus eine Potenz, dann kann man stets den Exponenten als Faktor vor den Logarithmus schreiben:

$$\log_a (b^c) = c \log_a b \quad \text{z. B.} \quad \log_4 128 = \log_4 2^7 = 7 \log_4 2 = 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

Dieses letzte Gesetz bleibt auch dann richtig, wenn $c \leq 0$. Zum Beispiel können wir

$$\log_3 \frac{1}{27} = \log_3 3^{-3} = -3 \log_3 3 = -3 \cdot 1 = -3$$

schreiben.

Wir behandeln nun **Aufgabe 14.**

Analog zum Wurzelziehen und Quadrieren besitzt auch das Logarithmieren eine verwandte Umkehroperation, die eng mit der **allgemeinen Exponentialfunktion** verbunden ist. Die Logarithmusfunktion

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a x,$$

für eine Basis $a > 0, a \neq 1$, ist nur für positive Argumente definiert. Auch die Zahl Null kann als Argument nicht verwendet werden. Die Exponentialfunktion

$$g : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), \quad x \mapsto a^x,$$

wiederum definiert für positive Basen a ungleich 1, ist die Umkehrfunktion des Logarithmus. Das bedeutet, dass sie sich gewissermaßen aufheben, wenn man sie ineinander einsetzt:

$$\log_a a^x = x \quad \text{und} \quad a^{\log_a x} = x.$$

Wir berechnen beispielsweise

$$5^{\log_{25} 3} = (25^{1/2})^{\log_{25} 3} = \left(25^{\log_{25} 3}\right)^{1/2} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$$

oder auch

$$9^{\frac{\log_3 8}{3}} = \left((3^2)^{\log_3 8}\right)^{1/3} = \left((3^{\log_3 8})^2\right)^{1/3} = (8^2)^{1/3} = \sqrt[3]{64} = 4.$$

Logarithmen- und Exponentialgleichungen lassen sich häufig lösen, indem man die entsprechende Umkehroperation auf beiden Seiten anwendet. Bei **Logarithmengleichungen** wendet man die Exponentialfunktion an und umgekehrt. Wir wollen uns mit der Gleichung

$$\log_3 x + 2 \log_9(2x+2) = 2$$

befassen. Bevor wir Umformungsschritte vornehmen, müssen wir den Definitionsbereich der Logarithmen bestimmen, denn es kann passieren, dass am Ende Scheinlösungen auftreten, für die die Gleichung gar nicht definiert ist. Zum einen muss, damit $\log_3 x$ sinnvoll ausgewertet werden kann, $x > 0$ gelten. Andererseits benötigen wir auch $2x+2 > 0$, was auf $x > -1$ führt. Sofern $x > 0$ gilt, ist die linke Seite wohldefiniert. Da die Basen der beiden Logarithmen 3 und 9 lauten und somit beide Potenzen der Zahl 3 sind, bietet es sich an, auf beiden Seiten die Exponentialfunktion zur Basis 3 anzuwenden:

$$3^{\log_3 x + 2 \log_9(2x+2)} = 3^2$$

Über Potenz- und Logarithmengesetze vereinfacht sich dies zu

$$3^{\log_3 x} \cdot 3^{2 \log_9(2x+2)} = 9 \implies 3^{\log_3 x} \cdot \left(9^{2 \log_9(2x+2)}\right)^{1/2} = 9 \implies 3^{\log_3 x} \cdot 9^{\log_9(2x+2)} = 9.$$

Die Logarithmen lassen sich nun auflösen und es bleibt eine Polynomgleichung übrig:

$$x(2x+2) = 2x^2 + 2x = 9.$$

Diese quadratische Gleichung besitzt die Lösungen

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{19}}{2}.$$

Eine dieser beiden Zahlen ist < 0 , nur die Lösung $x = \frac{-1+\sqrt{19}}{2}$ kann Lösung der Ausgangsgleichung sein. Dieser Effekt lässt sich wie folgt beispielhaft erklären: Die Funktion $x \mapsto \log_3 x$ hat den maximalen Definitionsbereich $(0, \infty)$. Wendet man nun die Exponentialfunktion zur Basis 3 auf diesen Ausdruck an, dann erhalten wir

$$3^{\log_3 x} = x$$

und damit einen Polynomausdruck, der grundsätzlich für alle $x \in \mathbb{R}$ erklärt ist. Man muss stets berücksichtigen, dass auch diese Umformung nur im Falle $x > 0$ möglich ist. Während bei den Wurzelgleichungen regelrecht falsche Lösungen auftreten können, muss man bei Logarithmengleichungen damit rechnen, Lösungen außerhalb des Definitionsbereichs der Ausgangsgleichung zu erhalten, die nachträglich ausgeschlossen werden müssen.

Wir behandeln nun **Aufgabe 15.**

Exponentialgleichungen lassen sich durch Logarithmierung beider Seiten der Gleichung lösen. Es genügt dabei in der Regel, den natürlichen Logarithmus anzuwenden, denn letztlich lassen sich Logarithmen zu unterschiedlichen Basen ineinander umwandeln. Die einfache Gleichung

$$3^x = 5$$

lautet logarithmiert

$$\ln(3^x) = \ln 5 \implies x \ln 3 = \ln 5 \implies x = \frac{\ln 5}{\ln 3} = \log_3 5.$$

Zum Schluss sind wir wieder zur Basis 3 übergegangen. Wenden wir uns der Gleichung

$$7^{2x-4} = 14^{x-2}$$

zu, die zu

$$\ln 7^{2x-4} = \ln 14^{x-2} \implies (2x-4) \ln 7 = (x-2) \ln 14$$

wird. Wegen $2x-4 = 2(x-2)$ schreiben wir zu

$$2(x-2) \ln 7 = (x-2) \ln 14 \implies 2(x-2) \ln 7 - (x-2) \ln 14 = (x-2)(2 \ln 7 - \ln 14) = 0$$

um. Da ein Produkt Null ist, wenn mindestens ein Faktor Null ist, lautet die Lösung $x = 2$. Auch vermeintlich kompliziertere Exponentialgleichungen lassen sich durch Logarithmierung leicht lösen. Wendet man $\ln$ auf beide Seiten der Gleichung

$$5^x \cdot 10^{2x} = 15^{4x-1}$$

an, dann ergibt sich unter Ausnutzung der Gestze für den Logarithmus die lineare Gleichung

$$\ln(5^x \cdot 10^{2x}) = \ln 15^{4x-1} \implies \ln(5^x) + \ln(10^{2x}) = \ln 15^{4x-1} \implies x \ln 5 + 2x \ln 10 = (4x-1) \ln 15.$$

Auch wenn weiterhin Logarithmen auftauchen, so sind deren Argumente Zahlen, also insbesondere unabhängig von x . Auf beiden Seiten stehen Polynome ersten Grades. Man erhält

$$x(\ln 5 + 2 \ln 10) = 4 \ln 15 \cdot x - \ln 15 \implies \ln 15 = (4 \ln 15 - \ln 5 - 2 \ln 10)x,$$

was zur Lösung

$$x = \frac{\ln 15}{4 \ln 15 - \ln 5 - 2 \ln 10} = \frac{\ln 15}{\ln 405/4}$$

führt.

In gewisser Verwandtschaft zu den biquadratischen Gleichungen haben diejenigen Exponentialgleichungen eine Sonderrolle, bei denen eine Substitution möglich ist, mit der man eine Polynomgleichung erhält. Zum Beispiel kann

$$16^x - 4^{x+1} - 1 = 0$$

in eine solche Gleichung überführt werden. Eine Logarithmierung auf beiden Seiten würde hier zu Problemen führen, denn einerseits lautet die rechte Seite 0, sodass man $\ln$ gar nicht anwenden könnte und andererseits gibt es kein Gesetz für die Behandlung von Logarithmen von Summen.

Beispielsweise könnten wir den Term $\ln(16^x - 4^{x+1} - 1)$ nicht weiter umformen. Wir erkennen jedoch, dass die linke Seite der Gleichung mittels

$$16^x - 4^{x+1} - 1 = (4^2)^x - 4 \cdot 4^x - 1 = (4^x)^2 - 4 \cdot 4^x - 1$$

umgeschrieben werden. Man erkennt, dass dieser letzte Ausdruck einem quadratischen Term in 4^x entspricht. Setzen wir $z = 4^x$, dann lautet die neue Gleichung

$$z^2 - 4z - 1 = 0.$$

Sie besitzt die Lösungen $z_1 = 2 - \sqrt{5}$ und $z_2 = 2 + \sqrt{5}$. Man beachte, dass $z_1 < 0$, weswegen $z_1 = 4^x$ für kein x erfüllt sein kann. Jedoch ist $z_2 = 4^x$ möglich. Man erhält

$$2 + \sqrt{5} = 4^x \implies \ln(2 + \sqrt{5}) = x \ln 4 \implies x = \frac{\ln(2 + \sqrt{5})}{\ln 4}$$

als Lösung der Gleichung.

Ähnlich geht man bei der Gleichung

$$e^{16x} + e^{8x} - 6 = 0$$

vor, die man auch

$$(e^{8x})^2 + e^{8x} - 6 = 0$$

schreiben kann. Setzt man $z = e^{8x}$, dann erhält man

$$z^2 + z - 6 = 0$$

mit den Lösungen $z_1 = -3$ und $z_2 = 2$. Wiederum entfällt die negative dieser beiden Lösungen. Wir rechnen weiter: $2 = e^{8x} \implies \ln 2 = 8x \ln e \implies x = \frac{\ln 2}{8}$. Beachten Sie: $\ln e = \ln e^1 = 1$.

Die Exponentialfunktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), \quad x \mapsto e^x,$$

liefert für jedes Argument $x \in \mathbb{R}$ einen positiven Wert e^x . Um die Potenzschreibweise in mathematischen Texten umgehen zu können, verwendet man auch oft die Schreibweise

$$\exp(x) = e^x.$$

Die Exponentialfunktion zur Basis e ist die Umkehrfunktion des natürlichen Logarithmus, denn es gilt

$$\exp(\ln(x)) = \ln(\exp(x)) = x.$$

Die allgemeine Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$ für eine beliebige Basis $a > 0, a \neq 1$, lässt sich aus der e -Funktion herleiten, denn offenbar gilt

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}.$$

Beim Übergang von e^x zur Potenz mit allgemeiner Basis a^x wird also lediglich der Faktor $\ln a$ in das Argument eingefügt. Beachten Sie, dass $\ln a < 0$ genau für die Basen $a \in (0, 1)$ gilt. Für diese Basen ist $x \mapsto a^x$ monoton fallend, für $a > 1$ entsprechend wachsend. Vergleichen Sie dies mit den Schaubildern aus dem achten Kapitel!

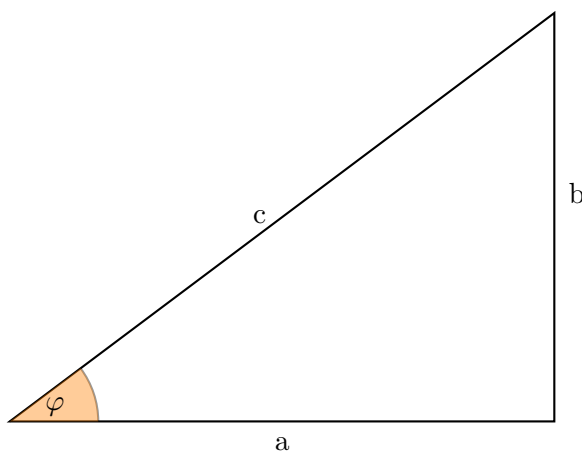
Wir behandeln nun **Aufgabe 16**.

Kapitel 7: Sinus und Cosinus

Es gibt mehrere Zugänge zu den Funktionen Sinus und Cosinus. Während diese sogenannten **Winkelfunktionen** in der Schule geometrisch mit Hilfe von Dreiecken am Einheitskreis motiviert und eingeführt werden, verwendet man dafür in Universitätskursen regelmäßig sogenannte Potenzreihen, die Ihnen vermutlich im ersten Studienjahr begegnen werden. Mit Hilfe dieser Reihen (und mit Kenntnissen zu den komplexen Zahlen) kann man eine Verbindung herstellen zwischen der e -Funktion sowie Sinus und Cosinus, die besonders prägnant in Form der Eulerschen Formel

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

für ein beliebiges $\varphi \in \mathbb{R}$ formuliert werden kann. Nichtsdestotrotz lohnt sich der Blick auf die trigonometrischen Funktionen von der geometrischen Perspektive schon deshalb, weil er uns Zugänge zu Rechnungen zu Flächen und Körpern in Ebene und Raum eröffnet. Sehen wir uns das folgende rechtwinklige Dreieck an:



Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite c nennt man **Hypotenuse**. Die übrigen Seiten sind die Katheten. Bezogen auf den eingezeichneten Winkel φ ist die Kathete a , die einen Schenkel des Winkels bildet, die sogenannte **Ankathete**. Entsprechend nennt man die Seite b gegenüber φ auch **Gegenkathete**. Nach dem **Satz des Pythagoras** gilt für die Seitenlängen

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Der **Sinus** des Winkels φ wird zunächst für $\varphi \in (0^\circ, 90^\circ)$ definiert als das Verhältnis aus Gegenkathete und Hypotenuse. Man setzt also für diese Winkelgrößen

$$\sin(\varphi) := \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}.$$

Wenn man den Winkel φ sehr klein werden lässt, dann wird auch dieses Verhältnis klein. Daher erscheint es sinnvoll, dass $\sin(0^\circ) = 0$. Andererseits ist eine Kathete stets kürzer als die Hypotenuse, woraus $\sin(\varphi) \in [0, 1]$ folgt. Man kann sich anschaulich überlegen, dass das Seitenverhältnis, das den Sinus definiert, gegen 1 tendiert, wenn der Winkel bis auf (fast) 90° vergrößert wird. Es ist $\sin(90^\circ) = 1$.

Der **Cosinus** eines Winkels ist wiederum ein Seitenverhältnis, dieses Mal jedoch das aus Ankathete und Hypotenuse:

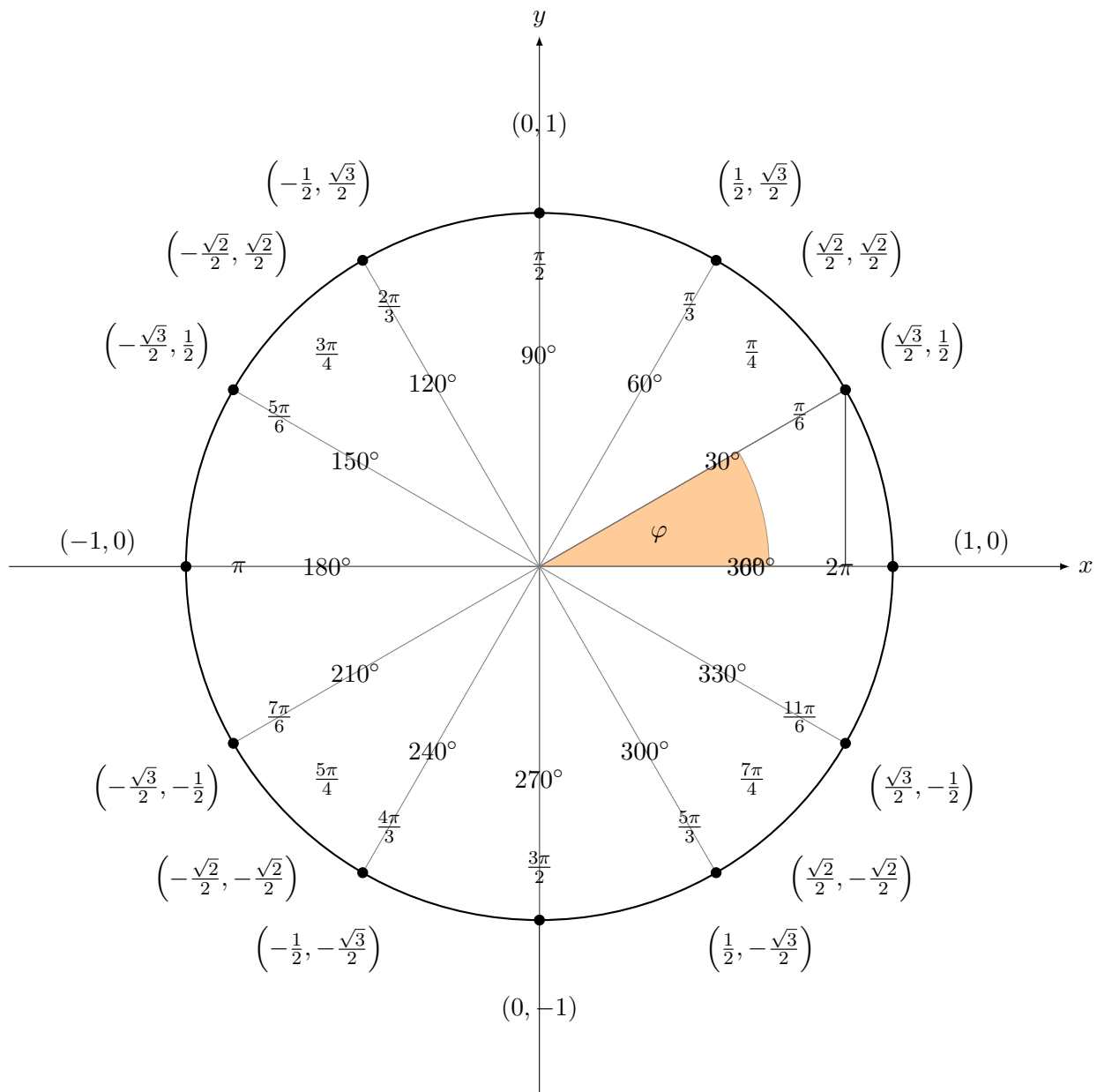
$$\cos(\varphi) := \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}.$$

Man überlegt sich analog zum Sinus, dass $\cos(0^\circ) = 1$, $\cos(\varphi) \in [0, 1]$ und $\cos(90^\circ) = 0$ gelten müssen.

Wir behandeln nun **Aufgabe 17**.

Sie wissen bereits aus der Schule, dass man Sinus und Cosinus auch für Argumente außerhalb von $\varphi \in [0^\circ, 90^\circ]$ definieren kann. Wenn wir annehmen, dass die Länge der Hypotenuse 1 ist, dann würde z.B. die Länge der Gegenkathete b direkt dem Sinus des Winkels φ entsprechen. Mit dieser Idee können wir die Werte unserer Winkelfunktionen auf einer gesamten Periode $\varphi \in [0^\circ, 360^\circ]$ bestimmen. In der unten befindlichen Darstellung ist ein Kreis mit Radius 1 eingezeichnet, der **Einheitskreis**. Auch unser Dreieck aus dem ersten Teil finden Sie dort wieder. Beachten Sie, dass der Radius gerade 1 ist, weswegen auch die Hypotenuse des Dreiecks diese Länge hat. Damit können wir uns überlegen, dass die Länge der Gegenkathete der Sinus, die der Ankathete der Cosinus von φ ist. Die (angegebenen) Koordinaten des Schnittpunkts der Hypotenuse mit dem Kreis beinhalten damit die Werte der Winkelfunktionen: Am Einheitskreis gilt für diese Punkte

$$(x, y) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi)).$$



Zur Anwendung: Es gelten, zum Beispiel, $\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\cos(240^\circ) = -\frac{1}{2}$. Sie werden bereits bemerkt haben, dass die verschiedenen Winkel in obiger Graphik auf zwei Weisen angegeben sind. Bislang haben wir sie ausschließlich im **Gradmaß** notiert. Sie werden in der Hochschulmathematik aber regelmäßig auf Winkel im **Bogenmaß** stoßen. Im Allgemeinen gilt die Umrechnungsformel

$$\varphi_{\text{Bogenmaß}} = \frac{\varphi_{\text{Gradmaß}}}{180^\circ} \cdot \pi.$$

Beispielsweise ist ein 90° -Winkel im Bogenmaß $\pi/2$. Eine volle Periode von $[0^\circ, 360^\circ]$ ist dann im Bogenmaß schlicht $[0, 2\pi]$. Mit Hilfe des Einheitskreises können wir die Funktionswerte zu Sinus und Cosinus für Argumente aus einer Periode $[0, 2\pi]$ angeben. Man kann diese Winkelfunktionen nun auch für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ definieren, indem man sie periodisch fortsetzt. Sowohl Sinus als auch Cosinus besitzen die Eigenschaft der **2π -Periodizität**. In Formeln bedeutet das

$$\sin(\varphi) = \sin(\varphi + 2\pi) \quad \text{und} \quad \cos(\varphi) = \cos(\varphi + 2\pi), \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}.$$

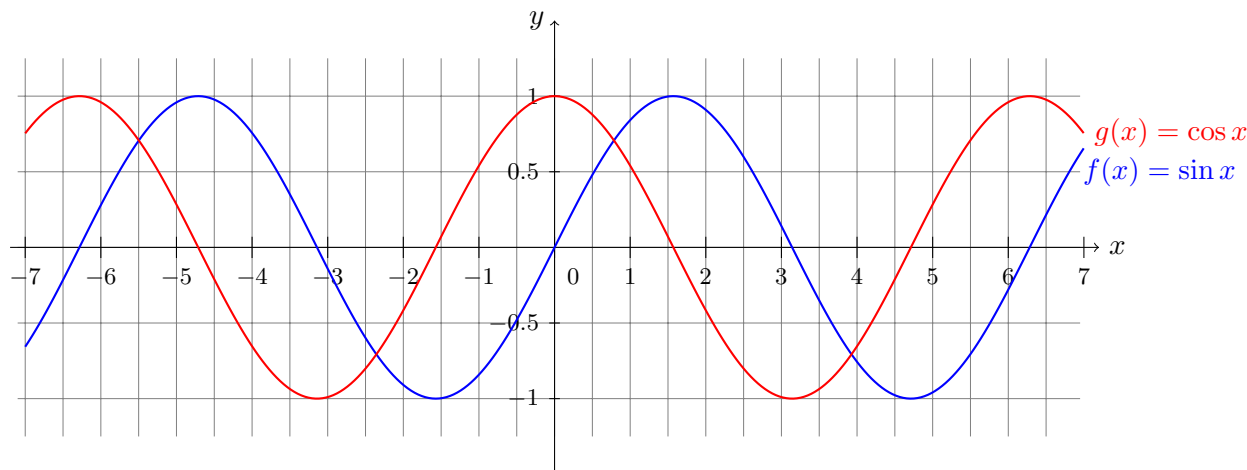
Vereinfacht gesprochen, ändert sich bei den Werten von Sinus und Cosinus nichts, wenn man eine Periode (oder sogar mehrere Perioden) weiter nach links oder rechts im Zahlenstrahl springt. Beispielsweise ist

$$\sin(37\pi) = \sin(\pi + 18 \cdot 2\pi) = \sin(\pi) = 0.$$

Zumindest die folgenden Funktionswerte sollten Sie auswendig kennen. Sie tauchen in etlichen Rechnungen immer wieder auf.

φ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin(\varphi)$	0	1	0	-1	0
$\cos(\varphi)$	1	0	-1	0	1

Die Schaubilder von Sinus und Cosinus sind Ihnen aus der Schule bekannt:



Wir behandeln nun **Aufgabe 18**.

Legen wir wiederum die Definitionen der Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck (siehe oben) zugrunde, so erhalten wir die Beziehung

$$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = \frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1,$$

die auch **trigonometrischer Pythagoras** genannt wird. Man kann zeigen, dass sie für jedes $\varphi \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Sie bietet eine Möglichkeit, Sinus- und Cosinusterme ineinander umzuwandeln.

Auch die Funktion des **Tangens** wird Ihnen im Studium gelegentlich begegnen. Für ein $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ wird sie definiert über

$$\tan(\varphi) := \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)},$$

es handelt sich (für Winkel bis 90°) um das Verhältnis aus (den Längen von) Gegenkathete und Ankathete. Bedingt dadurch, dass der Cosinus Nullstellen bei $\varphi = -\pi/2$ und $\varphi = \pi/2$ hat, kann der Tangens für diese Winkel nicht definiert sein. Die **Tangensfunktion**

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \tan(\varphi),$$

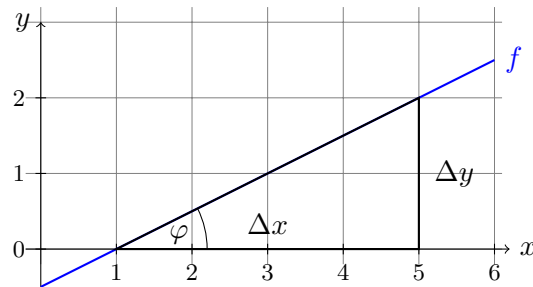
ist zunächst auf einer Periode der Länge π gegeben und kann dann π -periodisch fortgesetzt werden. Es gilt dann nach dieser Fortsetzung

$$\tan(\varphi) = \tan(\varphi + \pi)$$

für alle φ , die nicht Nullstelle der Cosinusfunktion sind. Den Tangens verwendet man z.B. für die Ermittlung des Schnittwinkels (des Graphen) einer Funktion mit einer Koordinatenachse. Da dies auf die Bestimmung von Winkeln zwischen einer linearen Funktion und der Achse zurückführt, wollen wir exemplarisch berechnen, unter welchem Winkel die lineare Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

die x -Achse schneidet.



Zusätzlich zum Funktionsgraphen ist ein Anstiegsdreieck eingezeichnet. Gemäß der Abbildung gilt nun also

$$\tan(\varphi) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

was einem Winkel von etwa $\varphi = 26.57^\circ$ entspricht. Es gibt noch weitere trigonometrische Funktionen, die gegenüber den drei bisher eingeführten seltener vorkommen. Wir können etwa den **Cotangens** einfach als *inversen Tangens* definieren:

$$\cot \varphi := \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}.$$

Dabei sind nur solche Argumente $\varphi \in \mathbb{R}$ zulässig, für die $\sin(\varphi) \neq 0$ gilt. Letztlich werden vor allem im angelsächsischen Raum auch die Funktionen **Sekans** und **Cosekans** definiert, die hier eher selten verwendet werden. Es handelt sich dabei um den *inversen Cosinus* bzw. den *inversen Sinus*.

Kapitel 8: Elementarfunktionen - Zusammenfassung

Wir haben nun sämtliche Funktionen behandelt, die standardmäßig in Termen auftauchen und nutzen die Gelegenheit nun, um ihre wichtigsten Eigenschaften zusammenzutragen.

Zu Beginn haben wir **Polynome** in ihrer allgemeinen Gestalt

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$$

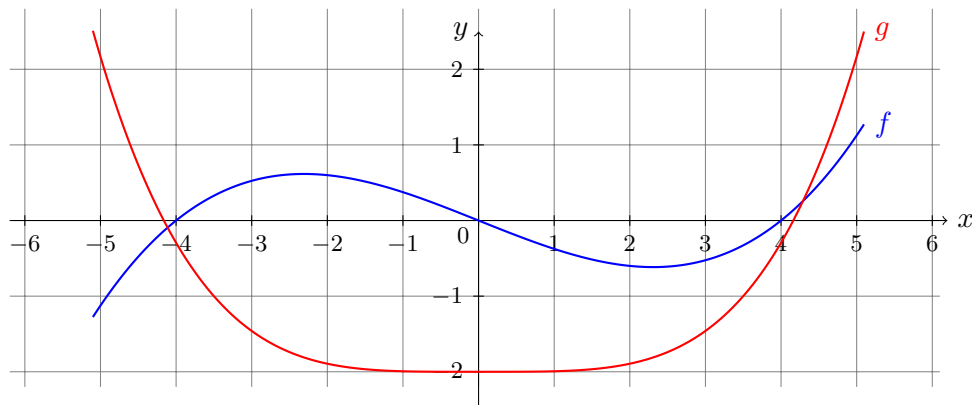
untersucht. Ihr maximaler Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}$. Ihr Wertebereich ist für ungeradzahlige Polynomgrade ebenfalls $W = \mathbb{R}$, für gerade Höchstexponenten jedoch nur eine Teilmenge $W \subset \mathbb{R}$. Sie haben bis zu n Nullstellen $x_1, \dots, x_n$ und lassen sich, falls es diese n Nullstellen gibt, über die Linearfaktorzerlegung

$$p(x) = a_n(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

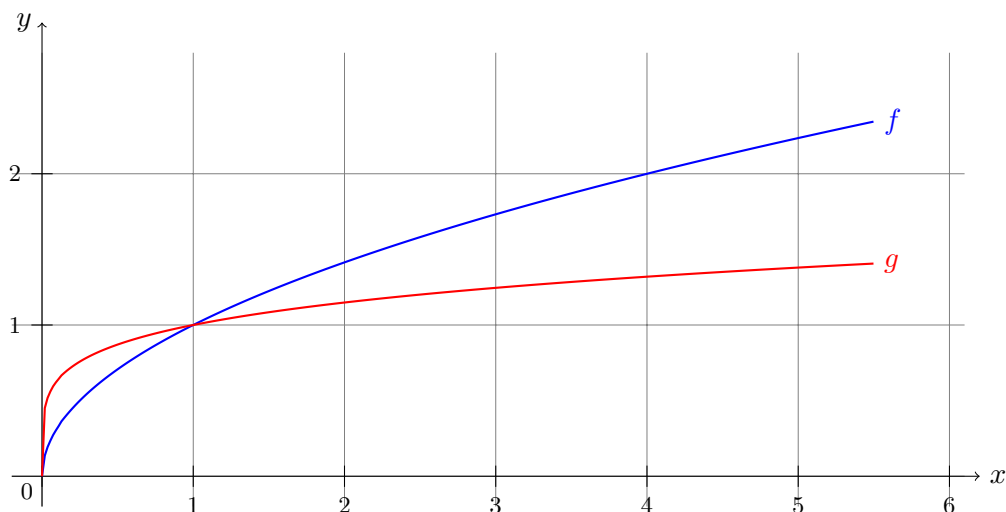
darstellen. Die Nullstellenbestimmung erfolgt für den Grad $n = 2$ über die p - q -Formel und für höhere Grade über eine Polynomdivision, die vorheriges Erraten von Lösungen voraussetzt. Diese möglichen Lösungen findet man bei Ganzzahligkeit aller Nullstellen unter den Teilern des Absolutgliedes. Wir stellen die Funktionen

$$f(x) = \frac{x^3}{40} - \frac{2x}{5} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{x^4}{150} - 2$$

nachfolgend graphisch dar.



Die **Wurzelfunktion** $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ ist nur für Argumente ab Null definiert, der maximale Definitionsbereich lautet also $D = [0, \infty)$. Da die Ergebnisse von Wurzelausdrücken ebenfalls nie negativ sein können, stimmt der Definitions- mit dem Wertebereich $W = [0, \infty)$ überein. Beim Lösen von Wurzelgleichungen hatten wir festgehalten, dass beim Quadrieren Scheinlösungen auftreten können, weswegen immer eine Probe erforderlich ist. Wurzelfunktionen sind die Umkehrfunktionen der Potenzfunktionen. Wir zeichnen f gemeinsam mit $g(x) = \sqrt[5]{x}$ in ein Koordinatensystem:



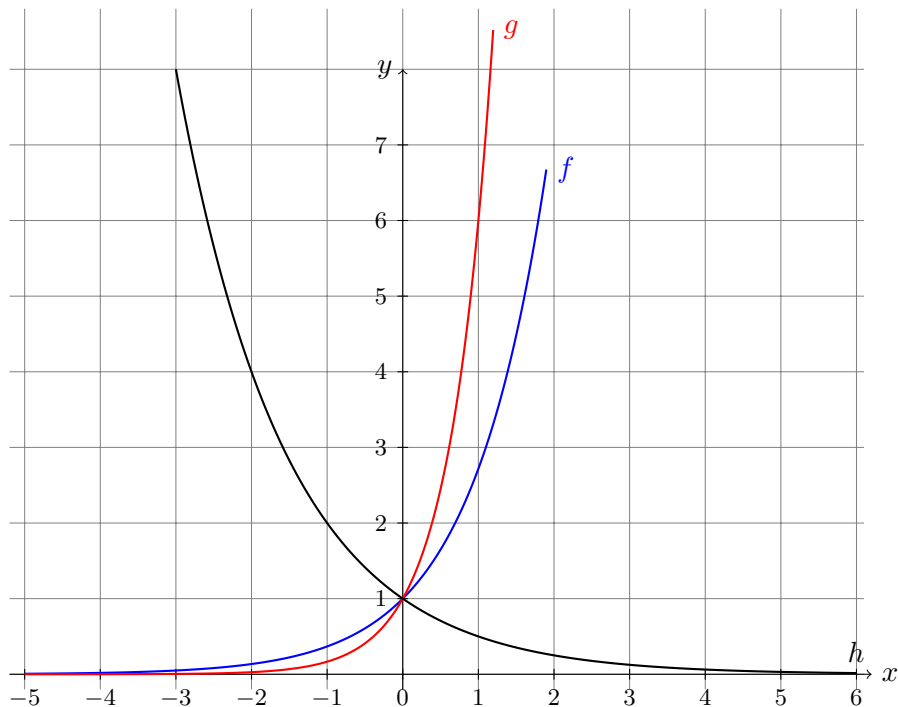
Die **Exponentialfunktion** $f(x) = e^x$ besitzt als Basis die Eulersche Zahl e . Man kann jede Zahl in f einsetzen, es ist also $D = \mathbb{R}$, jedoch ist der Wert von f stets positiv, es gilt also $W = (0, \infty)$. Ein wichtiger Funktionswert ist bei $f(0) = e^0 = 1$. Die allgemeine Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ ist für $a > 0, a \neq 1$, definiert und lässt sich über die Beziehung

$$a^x = e^{\ln(a)x}$$

auf die e -Funktion zurückführen. Für Basen $a > 1$ strebt f gegen 0 für Argumente $x \rightarrow -\infty$, bei Basen $a \in (0, 1)$ strebt sie dann gegen $+\infty$. Wir zeichnen neben f auch noch

$$g(x) = 6^x \quad \text{und} \quad h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

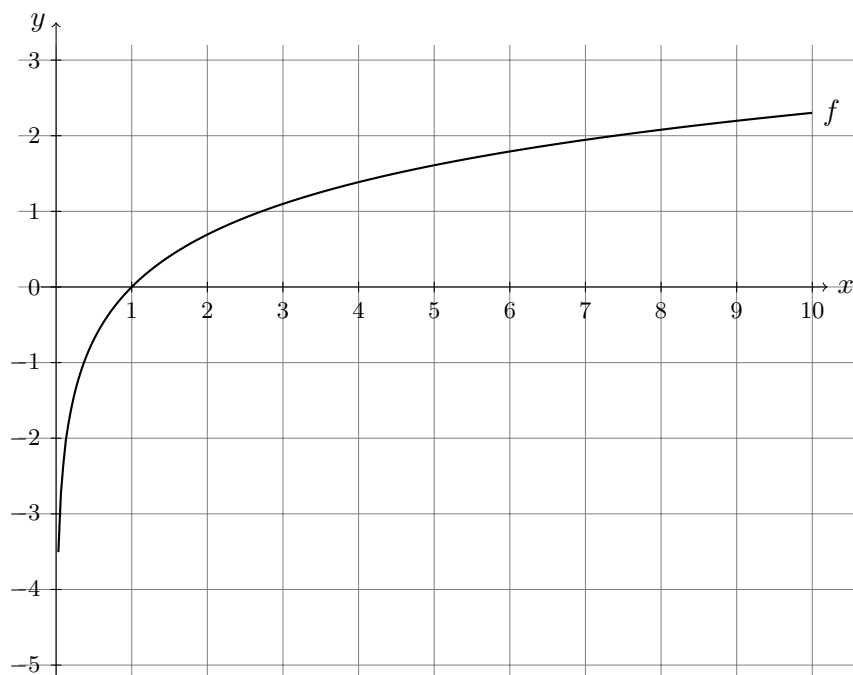
in das folgende Koordinatensystem ein.



Der **natürliche Logarithmus** $f(x) = \ln(x)$ kann nur für positive Argumente $x \in D = (0, \infty)$ ausgewertet werden. Als Werte kommen jedoch alle $y \in W = \mathbb{R}$ in Betracht. Dieser Logarithmus hat die Basis e . Wir haben den dekadischen Logarithmus zur Basis 10 und den binären zur Basis 2 kennen gelernt. Der Logarithmus hat bei $x = 1$ eine Nullstelle, denn es gilt $\ln(1) = 0$. Für Argumente, die gegen 0 tendieren, gehen die Funktionswerte gegen $-\infty$. Wenngleich der Logarithmus äußerst langsam wächst, streben seine Werte gegen $+\infty$, sofern es auch die Argumente tun. Den allgemeinen Logarithmus $\log_a x$ kann man mit folgender Umrechnungsformel auf den natürlichen Logarithmus zurückführen:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Natürlich muss davor $a > 0, a \neq 1$ vorausgesetzt werden. Allgemeine Logarithmen lassen sich daher als Vielfache des natürlichen Logarithmus auffassen.



Sowohl die **Sinusfunktion** als auch die **Cosinusfunktion** bilden die gesamten reellen Zahlen $D = \mathbb{R}$ auf das Intervall $W = [-1, 1]$ ab. Man definiert sie mittels geometrischer Methoden am Einheitskreis.

Es handelt sich um 2π -periodische Funktionen, was bedeutet, dass man nur die Werte innerhalb der Hauptperiode $[0, 2\pi]$ kennen muss, um die Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ fortzusetzen. Die Nullstellen der Sinusfunktion sind gerade

$$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad \text{also} \quad \sin(k\pi) = 0,$$

die der Cosinusfunktion sind

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad \text{also} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0.$$

Wichtige weitere Funktionswerte sind $\sin(\pi/2) = 1, \sin(3\pi/2) = -1, \cos(0) = 1$ und $\cos(\pi) = -1$. Der Sinus ist punktsymmetrisch zum Ursprung, also

$$\sin(x) = -\sin(-x),$$

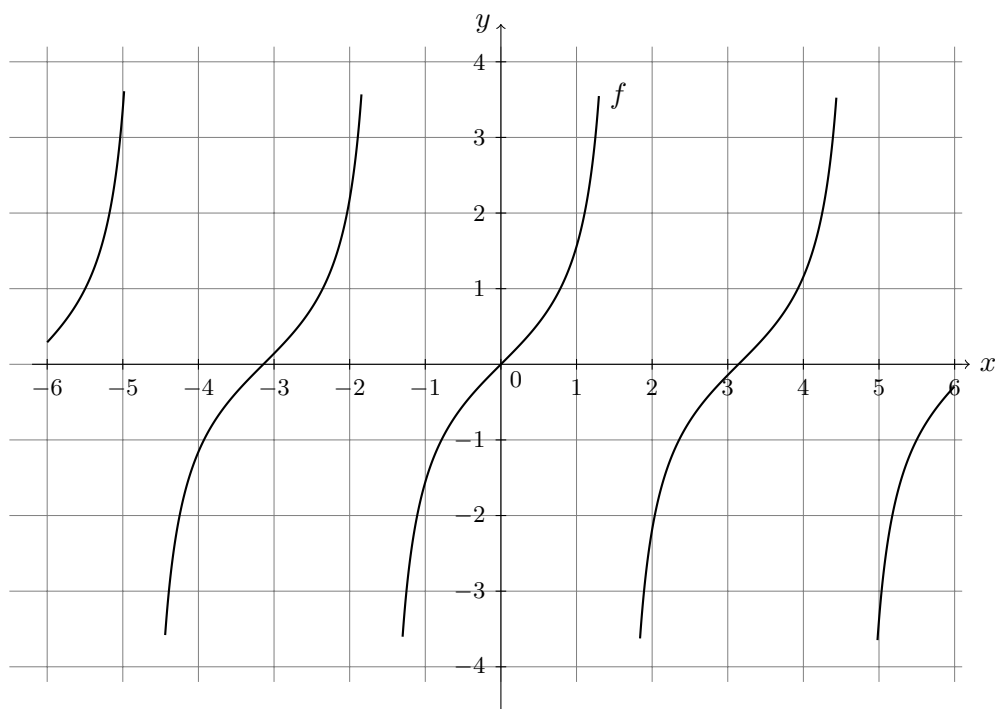
der Cosinus ist achsensymmetrisch:

$$\cos(x) = \cos(-x).$$

Der **Tangens** $f(x) = \tan(x)$ ist der Quotient aus Sinus und Cosinus. Grundsätzlich kann er für alle Argumente ausgewertet werden, für die der Cosinus nicht Null wird. Offenbar ist das gerade die Menge

$$D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2 | k \in \mathbb{Z}\}.$$

Der Wertebereich ist $W = \mathbb{R}$. Der Tangens ist ebenfalls punktsymmetrisch zum Ursprung. Wichtige Funktionswerte sind $\tan(0) = 0$ und $\tan(\pi/4) = 1$.



Kapitel 9: Folgen und Reihen

Folgen sind besondere Funktionen, bei denen man als Definitionsbereich üblicherweise die natürlichen Zahlen (eventuell unter Einbeziehung der Zahl Null) oder die ganzen Zahlen betrachtet. Analog zu den übrigen Funktionen erhalten auch Folgen einen Kleinbuchstaben als Namen, regelmäßig fängt man dabei mit den Buchstaben zu Beginn des Alphabets an und nennt seine erste Folge schlichtweg

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad n \mapsto a_n.$$

Eine Folge ist angegeben durch eine bestimmte Vorschrift, mit der zum **Index** n das **Folgenglied** a_n angegeben werden kann. Die einfachste Möglichkeit, Folgen darzustellen, ist über die sogenannte **explizite Bildungsvorschrift**, bei der einfach ein Term in Abhängigkeit von n angegeben wird, mit dem Sie die Folgenglieder ausrechnen können. Sei z.B.

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

vorgegeben. Es handelt sich um die Folge der inversen Quadratzahlen. Das sechste Glied der Folge ermitteln Sie dann etwa durch direkte Rechnung:

$$a_6 = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}.$$

Da stets Argumente aus $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0$ (oder $\mathbb{Z}$) untersucht werden, gibt es so etwas wie $a_{1/2}$ oder gar a_π nicht. Der Unterschied zwischen unserer Folge a und der Funktion $f(x) = 1/x^2$ liegt also vor allem in der Grundmenge zur Verfügung stehender Argumente. Die Glieder dieser Folge (und damit ihre Werte) sind $\{1, 1/4, 1/9, 1/16, 1/25, \dots\}$.

Es gibt bei den Folgen noch eine zweite wichtige Methode, mit der man sie darstellen kann: über die sogenannte **rekursive Bildungsvorschrift**. Wir werden uns daran gewöhnen müssen, dass ein und dieselbe Folge oft auf zwei verschiedene Weisen angegeben werden kann, die beide spezifische Vor- und Nachteile aufweisen. Wir wollen eine weitere Folge b einführen. Dafür geben wir das erste Glied $b_1 = 3$ direkt an. Statt nun explizit anzugeben, wie es weitergeht, formulieren wir eine Gleichung, aus der allgemein das n -te Folgenglied aus dem $(n-1)$ -ten Glied bestimmt werden kann. Es sei

$$b_n = 2b_{n-1} + 1, \quad \text{für } n \geq 2.$$

Wenn wir nun $n = 2$ in diese Gleichung einsetzen, dann erhalten wir

$$b_2 = 2b_1 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

und damit das zweite Folgenglied. Wenn wir nun einmal $n = 10$ einsetzen würden, dann liefert uns die Rekursionsvorschrift zwar über

$$b_{10} = 2b_9 + 1$$

einen richtigen Zusammenhang über die Glieder b_9 und b_{10} , aber ohne zumindest eines dieser Glieder auch zu kennen, ist dies wenig hilfreich. Es ist klar, dass wir mit dem bisherigen Wissen, also mit $b_1 = 3$ und $b_2 = 7$ gerade einmal b_3 direkt berechnen können:

$$b_3 = 2b_2 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15.$$

Es geht weiter:

$$b_4 = 2b_3 + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31.$$

Um das sechste Glied zu erhalten, das wir im Falle der Folge a direkt ausrechnen konnten, wären sogar noch zwei weitere Rechnungen vonnöten. Das gibt uns die Intuition, dass rekursiv gegebene Folgen einen gewissen Aufwand erfordern, um die Glieder der Folge zu berechnen. Wir merken uns, dass wir bei Rekursionen (üblicherweise) die Glieder der Folge bis zum Index $n-1$ kennen müssen, um das n -te Glied zu berechnen.

Kurzum, die explizite Bildungsvorschrift einer Folge ist die Angabe eines von n abhängigen Terms, mit dem das n -te Folgenglied direkt ausgerechnet werden kann. Die rekursive Bildungsvorschrift

setzt einen oder mehrere Startwerte voraus sowie einen Zusammenhang zwischen dem n -ten Glied und den vorherigen. Rekursionsdarstellungen sind *immer* zweiteilig: mit Startwert und Rekursionsgleichung.

Untersuchen wir etwa die rekursiv gegebene Folge

$$c_1 = 1, \quad c_n = c_{n-1} + 2n - 1 \quad \text{für } n \geq 2.$$

Wir berechnen sukzessive $c_2 = 4, c_3 = 9, c_4 = 16, c_5 = 25, \dots$ und formulieren den begründeten Verdacht, dass es sich dabei um die Folge der Quadratzahlen handelt, deren explizite Darstellung natürlich $c_n = n^2$ lautet. Streng genommen ist das Erkennen eines (vermeintlichen) Musters noch kein Beweis. Diesen leistet man über das Prinzip der vollständigen Induktion, das Ihnen im Studium bald begegnen wird. Wichtig ist an dieser Stelle jedoch, dass wir verstehen, dass hier lediglich ein und dieselbe Folge auf zwei Weisen dargestellt worden ist.

Wenn wir uns an den Aufwand erinnern, mit dem wir die Glieder der Folge b berechnet haben, dann könnte man sich die Frage stellen, welche Daseinsberechtigung rekursive Folgen überhaupt haben. Zum einen kann die Situation auftauchen, dass Sie nur diese Form der Folge gegeben haben. Nicht immer erkennt man sofort ein Muster, mit dem man einen kompakten expliziten Term angeben kann. Andererseits sind explizite Folgenterme oft wesentlich komplizierter als Rekursionsvorschriften, wie sie in den Übungen anhand der Fibonacci-Zahlen nachvollziehen werden. Rekursionen sind zwar umständlich, aber üblicherweise leichter anzugeben. Wir untersuchen etwa die Folge d , die dieses Mal sogar mit zwei Startwerten ausgestattet wird:

$$d_1 = 2, d_2 = 4, \quad d_n = 2d_{n-1} + 3d_{n-2}, \quad \text{für } n \geq 3.$$

Sie sehen dabei, dass eine Rekursionsvorschrift das n -te Glied auch in Abhängigkeit der vorherigen beiden angeben kann. Wir berechnen

$$\begin{aligned} d_3 &= 2d_2 + 3d_1 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 14 \\ d_4 &= 2d_3 + 3d_2 = 2 \cdot 14 + 3 \cdot 4 = 40 \\ d_5 &= 2d_4 + 3d_3 = 2 \cdot 40 + 3 \cdot 14 = 122 \end{aligned}$$

und stellen fest, dass kein offensichtliches Muster vorliegt. Es handelt sich bei dieser speziellen rekursiven Folge um eine sogenannte **lineare Differenzengleichung**, deren explizite Lösung Sie erst nach einigen Studiensemestern berechnen können. Es sei verraten, dass die explizite Form dieser Folge durch

$$d_n = \frac{1}{2} ((-1)^{n+1} + 3^n)$$

gegeben ist. Wir rechnen für die ersten fünf Glieder nach:

$$\begin{aligned} d_1 &= 0.5 ((-1)^2 + 3^1) = 2 \\ d_2 &= 0.5 ((-1)^3 + 3^2) = 4 \\ d_3 &= 0.5 ((-1)^4 + 3^3) = 14 \\ d_4 &= 0.5 ((-1)^5 + 3^4) = 40 \\ d_5 &= 0.5 ((-1)^6 + 3^5) = 122 \end{aligned}$$

Wir behandeln nun **Aufgabe 19**.

Wir behandeln nun **Aufgabe 20**.

Wir behandeln nun **Aufgabe 21**.

Folgen werden im mathematischen Teil Ihres Studiums eine erhebliche Rolle spielen. Zum einen behandelt man sie in der Analysis ganz originär, untersucht ihre Eigenschaften (etwa Monotonie und Beschränktheit) und bestimmt ggf. Grenzwerte. Schon die Definition des Grenzwerts einer Folge kommt nicht ohne den Einsatz einiger für Sie neuer Symbole aus. So werden Sie schon in wenigen Wochen kennen lernen, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann gegen den Wert a *konvergiert*, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Lassen Sie sich nicht entmutigen, wenn Ihnen das noch nichts sagt. Denn schließlich erwartet das auch noch niemand von Ihnen. Auch die Grenzwerte von Funktionen definiert man mit Hilfe von Folgengrenzwerten. Da auch die Ableitung ein Funktionsgrenzwert ist, nämlich gerade der Differentialquotient, sind Folgen (zumindest im Hintergrund) allgegenwärtig. Das Konzept der Reihen fußt unmittelbar auf dem von Folgen, wie wir gleich sehen werden. Letztlich werden Sie Folgen auch außerhalb der Mathematikvorlesungen antreffen, denn regelmäßig interpretiert man den Index n z.B. als Zeitindex und a_n als den Wert einer Größe zu einer festen Zeit.

In der Betriebswirtschaftslehre bezeichnet K_n oft einen Kapitalsaldo im Jahre n . Mit t_n könnte in der Physik die Anzahl von Elementarteilchen angegeben werden, nachdem n Halbwertszeiten vergangen sind. Letztlich kann man mit f_n die Amplitude bei einer gedämpften Schwingung beschreiben, nachdem n Perioden durchlaufen wurden.

Wie bereits angesprochen bilden **Reihen** eine besondere Sorte von Folgen, genauer gesagt handelt es sich um **Partialsummenfolgen**. Stellen Sie sich vor, Sie hätten eine Folge (a_n) in expliziter Form gegeben und würden nun eine neue Folge (s_n) bilden, indem Sie schlichtweg die ersten n Glieder von a jeweils aufsummieren. Wir setzen also zunächst

$$s_1 = a_1, \quad \text{dann} \quad s_2 = a_1 + a_2 \quad \text{und weiter} \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3.$$

Im Allgemeinen würden wir also

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

schreiben. Dabei taucht das neue Symbol Σ bereits auf. Es handelt sich um ein großes griechisches Sigma, mit dem in der Mathematik Summen beschrieben werden. Dieses Zeichen ist wahrhaftig ein in mathematischen Texten allgegenwärtiges Symbol. Nebenbei bemerken wir, dass über obiges Summationsprinzip eine neue Folge entstanden ist, die Partialsummenfolge (s_n) . Wir werden in Zukunft selten von s_n sprechen und stattdessen direkt mit Summenausdrücken arbeiten. Im Allgemeinen ist

$$\sum_{k=l}^j a_k = a_l + a_{l+1} + \cdots + a_j, \quad \text{für alle} \quad l, j \in \mathbb{Z}, j \geq l$$

definiert als die **Summe** der Glieder der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ für alle Indizes von l bis j . Dabei ist (a_n) die Summandenfolge. Die Variable k taucht nur auf der linken Seite der Gleichung auf. Es handelt sich um den **Summationsindex**, den wir im Ausdruck a_k wiederfinden. Diesen müssen wir nun sukzessive ersetzen - beginnend bei der **Summationsuntergrenze** l und bis zur **Summationsobergrenze** j laufend. Wir behandeln erste Beispiele. So ist

$$\sum_{k=3}^7 k = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25.$$

Das k wurde erst durch 3 ersetzt, dann immer um 1 erhöhend weiter, bis man bei 7 angelangt ist. Alle Summanden, die dadurch entstehen, zählt man zusammen. Wir üben weiter:

$$\sum_{k=2}^4 (2k+1)^2 = (2 \cdot 2 + 1)^2 + (2 \cdot 3 + 1)^2 + (2 \cdot 4 + 1)^2 = 5^2 + 7^2 + 9^2 = 25 + 49 + 81 = 155.$$

Beachten Sie dabei, dass ausschließlich k ersetzt wird. Übrige Zahlen oder Terme, die in der Summandenfolge auftauchen, bleiben konstant. Wir betrachten noch

$$\sum_{k=0}^2 \frac{1}{k^2 + k + 1} = \frac{1}{0^2 + 0 + 1} + \frac{1}{1^2 + 1 + 1} + \frac{1}{2^2 + 2 + 1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{21 + 7 + 3}{21} = \frac{31}{21}$$

und

$$\sum_{k=-1}^1 2 \cdot 3^k = 2 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 = \frac{2}{3} + 2 + 6 = 8\frac{2}{3} = \frac{26}{3}.$$

Wir behandeln nun **Aufgabe 22**.

Erinnern Sie sich noch an unsere Polynomdarstellung? Der oft verwendete Ausdruck

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$$

kann nun verstanden werden!

Wir wollen abschließend noch auf einige prominente Summenformeln eingehen. Von Interesse ist etwa die Frage nach der Summe der ersten n natürlichen Zahlen, also nach dem Reihenwert von

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

Möglicherweise kennen Sie bereits den Lösungstrick, den auch Gauß verwendet haben soll: Man schreibt die Summanden der Reihe doppelt auf, einmal vorwärts und einmal rückwärts.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-3 & n-2 & n-1 & n \\ \hline n & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Die Summe zweier übereinander stehender Zahlen ist in jeder Spalte gleich $n+1$. Gleichzeitig gibt es n Spalten. Damit ist die Summe aller Zahlen in der Tabelle offenbar $n(n+1)$. Da die gesuchte Summe nun gerade die Hälfte dessen sein muss, lösen wir entsprechend

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Die Frage nach der Summe der ersten n Quadratzahlen $1 + 4 + 9 + \cdots + n^2$ ist verwandt, jedoch nicht ganz so einfach lösbar. Es gilt

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

was wenig intuitiv erscheint, aber mittels vollständiger Induktion schon in den ersten Semesterwochen bewiesen werden kann.

Auch wenn es unrealistisch klingen mag, auch die Addition von unendlich vielen Summanden muss nicht unbedingt auf $+\infty$ führen. Die Untersuchung konvergenter Reihen bildet einen Schwerpunkt einer Einführungsvorlesung zur Analysis. Wir wollen die Reihe

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

untersuchen. Dafür berechnen wir die ersten Glieder der Partialsummenfolge:

$$\sum_{k=0}^0 \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

$$\sum_{k=0}^1 \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=0}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 2 - \frac{1}{4}$$

$$\sum_{k=0}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8} = 2 - \frac{1}{8}$$

$$\sum_{k=0}^4 \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16} = 2 - \frac{1}{16}$$

Der Wert der Summe will einfach nicht über den Wert 2 steigen - und er tut dies nie! Wir haben schon in den letzten Gleichheiten angedeutet, dass

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2 - \frac{1}{2^n}$$

gilt. Auch diese Behauptung lässt sich induktiv zeigen. Die Konsequenz ist, dass der Grenzwert der gegebenen Partialsummenfolge gerade

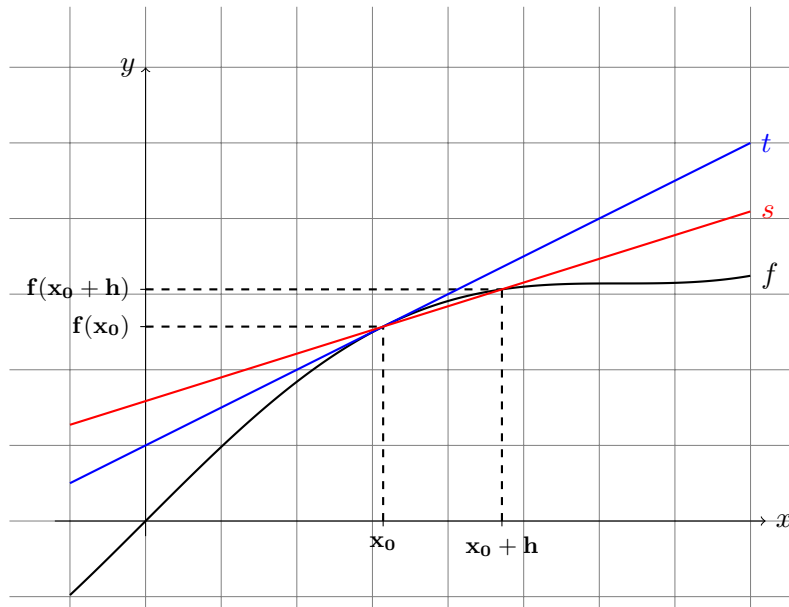
$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = 2$$

ist. Wenn wir immer weitere Summanden addieren, konvergiert der Ausdruck *irgendwann* gegen 2. Bei der betrachteten Summe handelt es sich um eine **geometrische Summe**, die üblicherweise zu Beginn des Studiums behandelt wird. Auch in der Kreditrechnung findet sie umfassende Anwendung.

Kapitel 10: Ableitung und Integral

Bevor wir mit den Details der Differentialrechnung beginnen, sei an dieser Stelle angemerkt, dass alles rund um die Themen Ableitung und Integral in der Mathematikvorlesung erneut grundlegend aufgebaut und im Detail vermittelt wird. Natürlich haben Sie aus der Schule bereits umfassende Kenntnisse zu diesen Schwerpunktthemen des Mathematikabiturs, aber seien Sie unbesorgt: jede Analysisvorlesung beinhaltet eine rigorose Einführung des Differentialquotienten und baut sämtliche Regeln und Anwendungen sukzessive auf. Man könnte sich daher fragen, warum eine Behandlung dieses Themas im Vorkurs dennoch sinnvoll ist, haben wir uns doch an anderer Stelle vorgenommen, auf einen Vorausblick auf Semesterthemen zu verzichten. Wir gehen diesen Weg dennoch, denn schließlich begegnet Ihnen die Mathematik nicht nur in der entsprechenden Service-Vorlesung, sondern auch in Ihren quantitativen Fachveranstaltungen. Nicht immer stehen die mathematischen Tools, die dort verwendet werden, bereits zur Verfügung. Kenntnisse in Differential- und Integralrechnung sind aber von Beginn an hilfreich. Vor allem im Kontext sogenannter **Differentialgleichungen** tauchen Ableitungen und Integrale immer wieder prominent auf.

Der Zugang zum Begriff der **Ableitung** ist geometrischer Natur. Sie wissen bereits, dass Ableitungen an einer Stelle lokalen Änderungsraten entsprechen. Geometrisch deuten wir den Wert der Ableitung an einer Stelle $x_0 \in D$ aus dem Definitionsbereich als **Anstieg der Tangenten** an die Funktion f an dieser Stelle. Sei also $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zunächst eine beliebige Funktion.



Der Anstieg der Tangenten t ist gesucht, jedoch nicht ohne weiteres verfügbar. Wir behelfen uns dabei, indem wir zunächst den Anstieg der Sekanten s bestimmen, die durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ für ein $h \neq 0$ verlaufen soll. Es handelt sich bei dieser Sekanten also um eine Gerade, die die Funktion f in zwei besonderen Punkten schneidet. Der Schnittpunkt $(x_0, f(x_0))$ ist dabei derjenige, an dem die Tangente anliegen soll. Den Anstieg einer Geraden, die durch zwei Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) verläuft, berechnet man bekanntlich über

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Demzufolge ist der Sekantenanstieg gegeben durch

$$m_{\text{Sekante}}(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0}.$$

Diesen Ausdruck (auf der rechten Seite) nennt man **Differenzenquotienten**. Anhand obiger Graphik scheint die Annahme begründet, dass wir auf den Tangentenanstieg kommen, wenn wir das h nun (betragsmäßig) immer kleiner werden lassen, denn dann rücken die beiden Sekantenpunkte beliebig eng zusammen. Demnach setzt man

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} m_{\text{Sekante}}(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Den Grenzwert des Differenzenquotienten für $h \rightarrow 0$ nennt man **Differentialquotienten** oder Ableitung von f an der Stelle x_0 . Es muss dabei unbedingt bemerkt werden, dass der obige Grenzwert nicht immer existiert. Im Falle seiner Existenz nennen wir f an der Stelle x_0 **differenzierbar**. Aber schon bei der Betragsfunktion $f(x) = |x|$ werden Sie sehen, dass diese etwa bei $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist.

Mit Hilfe dieser Definition kann man die folgenden **Standardableitungen** erhalten:

$f(x)$	1	x	x^r	$\ln(x)$	e^x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$f'(x)$	0	1	rx^{r-1}	$1/x$	e^x	$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Außerdem erhält man die **Summenregel**

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

und die **Faktorregel**

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

für eine beliebige Konstante $c \in \mathbb{R}$.

Wir wollen die Ableitung der Funktion $f(x) = 2x^2 - 7x$ einmal mit der Definition bestimmen. Dafür setzen wir den Differentialquotienten an:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^2 - 7(x+h) - (2x^2 - 7x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 7x - 7h - 2x^2 + 7x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4xh + 2h^2 - 7h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (4x + 2h - 7) = 4x - 7 \end{aligned}$$

Also erhalten wir $f'(x) = 4x - 7$, was auch über die Standardableitungen in Verbindung mit den Rechenregeln bestätigt werden kann. Die Ableitung von $g(x) = 2\sqrt[4]{x^3}$ erhalten Sie durch geschicktes Umschreiben der Wurzel:

$$g(x) = 2 \cdot x^{3/4} \implies g'(x) = 2 \cdot \frac{3}{4} x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{2} x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{2 \cdot \sqrt[4]{x}}.$$

Die Winkelfunktionen Sinus und Cosinus bilden gewissermaßen einen Ableitungskreis:

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x), \quad \frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x), \quad \frac{d}{dx} (-\sin(x)) = -\cos(x), \quad \frac{d}{dx} (-\cos(x)) = \sin(x)$$

Dabei taucht eine neue Schreibweise auf: der **Differentialoperator** $\frac{d}{dx}$. Dieser gibt zum Ausdruck, dass der nachfolgende Term nach x differenziert (also abgeleitet) werden soll. Es handelt sich nicht um Rechensymbole im Sinne einer Termumformung. Verstehen Sie den Operator am besten als eine (freundliche) Aufforderung zum Ableiten all dessen, was hinter ihm steht. Die Funktionen $\sin$ und $\cos$ bilden einen Viererzyklus: vierfache Differentiation führt auf die Ausgangsfunktion zurück. Solche Ableitungskreisläufe sind selten, aber sie werden mit den sogenannten hyperbolischen Funktionen noch einen weiteren (Zweier-)Zyklus kennen lernen.

Die Ableitung komplizierterer Funktionen erfordert ausgefeiltere Regeln. Mit der **Produktregel** können wir, wie der Name schon suggeriert, Produkte zweier Funktionen differenzieren. Es gilt

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Ist zum Beispiel $h(x) = \sqrt{x} \cdot e^x$, dann setzen Sie etwa $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = e^x$ (oder umgekehrt), bestimmen die Standardableitungen $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ und $g'(x) = e^x$ und ermitteln

$$h'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot e^x.$$

Wir behandeln nun **Aufgabe 23**.

Die **Quotientenregel** ist nicht mehr unbedingt Bestandteil der Schulmathematik, liefert aber über die Möglichkeit zur Ableitung von Quotienten zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, bei denen $g(x) \neq 0$ gelte, ein breites Anwendungspotenzial. Die Regel lautet

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Wir betrachten $h_3(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$ mit $f(x) = x^2 + 3$ und $g(x) = x + 1$ (wobei die korrekte Auswahl hier wichtig ist). Wegen $f'(x) = 2x$ und $g'(x) = 1$ erhalten Sie

$$h'_3(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2 + 3) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 2x + 1}.$$

Wir üben weiter: ist $h_4(x) = \frac{x + e^x}{x - e^x}$, dann lautet die Ableitung

$$h_4'(x) = \frac{(1 + e^x)(x - e^x) - (x + e^x)(1 - e^x)}{(x - e^x)^2} = \frac{2xe^x - 2e^x}{(x - e^x)^2}.$$

Oft lohnt es sich nicht, den eigentlich zu quadrierenden Nenner wirklich auszumultiplizieren. Die faktorisierte Darstellung erlaubt Ihnen oft einen sofortigen Einblick in mögliche Polstellen der Ableitung (und allgemeiner den Nullstellen des Nenners).

Wir behandeln nun **Aufgabe 24**.

Verkettungen von Funktionen bilden eine weitere wichtige Kategorie von Funktionstermen. Beispielsweise ist die Funktion $h_5(x) = \sin(x^2 + x)$ offenbar eine Verkettung der äußeren Funktion $f(x) = \sin(x)$ mit der inneren Funktion $g(x) = x^2 + x$, die in diese eingesetzt wurde. Wir können also auch $h_5(x) = f(g(x))$ schreiben. Im Allgemeinen liefert die **Kettenregel** eine Formel für die Differentiation in solchen Fällen:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Vermutlich kennen Sie den Merkspruch *innere mal äußere Ableitung*. Er findet sich in obiger Formel wieder. *Innen* und *außen* beziehen sich jeweils auf die innere und die äußere Funktion. Beachten Sie, dass in die Ableitung der äußeren Funktion wiederum die innere eingesetzt werden muss. Bezogen auf das Beispiel gilt $f'(x) = \cos(x)$ und damit $f'(g(x)) = \cos(x^2 + x)$. Wegen $g'(x) = 2x + 1$ liefert die Kettenregel

$$h_5'(x) = \cos(x^2 + x) \cdot (2x + 1).$$

Die Funktion $h_6(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$ kann man sowohl mit der Quotienten- als auch mit der Kettenregel ableiten. Wir können Sie auffassen als Verkettung der Funktionen $f(x) = \frac{2}{x}$ und $g(x) = x^2 - 4$. Wegen $f'(x) = -2/x^2$ und $g'(x) = 2x$ erhalten wir damit

$$h_6'(x) = \frac{-4x}{(x^2 - 4)^2}.$$

Wir behandeln nun **Aufgabe 25**.

Die Ableitung der allgemeinen Potenzfunktion $f(x) = a^x$ mit $a > 0, a \neq 1$, kann man auch mit der Kettenregel erhalten, denn

$$(a^x)' = (e^{\ln a \cdot x})' = \ln(a) e^{\ln a \cdot x} = \ln(a) a^x.$$

Wird ein Polynom differenziert, dann reduziert sich der Polynomgrad um 1, denn

$$\frac{d}{dx} p(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n \frac{d}{dx} a_k x^k = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}.$$

Dabei wurde die Summenregel benutzt, die man auch auf endlich viele Summanden ausdehnen kann. Folglich entsteht bei Differentiation eines n -gradigen Polynoms p das Ableitungspolynom p' mit Grad $n - 1$. Würde man dieses erneut ableiten, hätte das Ergebnis den Grad $n - 2$ usw. Sicher wissen Sie, dass man **höhere Ableitungen** einfach durch wiederholtes Ableiten einführt. So ist die zweite Ableitung von f einfach

$$f''(x) := (f'(x))',$$

die dritte

$$f'''(x) := (f''(x))'$$

und so weiter. Spätestens ab der vierten Ableitung nutzt man üblicherweise nicht mehr die Notation mit Ableitungsstrich, sondern würde $f^{(4)}(x)$ schreiben. Die $(n+1)$ -te Ableitung eines Polynoms n -ten Grades ist damit immer die Nullfunktion $p^{(n+1)}(x) = 0$.

Ableitungen begegnen Ihnen im Studium häufig in Form von Differentialgleichungen, also solchen Gleichungen, in denen eine Funktion y gesucht wird, deren Ableitung(en) auf den beiden Seiten der Gleichung auftauchen können. Beispielsweise wird die inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit nicht-konstanten Koeffizienten

$$x^2 \cdot y''(x) + x \cdot y'(x) = 1$$

von allen Funktionen

$$y(x) = c_1 \ln(x) + c_2 + \frac{\ln^2(x)}{2}$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gelöst, denn mit

$$y'(x) = \frac{c_1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$$

und

$$y''(x) = -\frac{c_1}{x^2} + \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

erhält man gerade

$$x^2 y''(x) + x y'(x) = (-c_1 + 1 - \ln(x)) + c_1 + \ln(x) = 1.$$

Natürlich ist das noch kein Beweis der Tatsache, dass es keine weiteren Lösungen geben kann. Dafür benötigen wir die Lösungstheorie zu den Differentialgleichungen, die in fortgeschrittenen Semestern erarbeitet und in den Fachvorlesungen (womöglich schon früher) angewendet wird. Mit Differentialgleichungen können viele Vorgänge in Natur und Technik präzise beschrieben werden.

Die **Integralrechnung** behandelt in einem gewissen Sinne die Umkehrung der Differentiation. Eine Funktion zu integrieren bedeutet, eine weitere Funktion anzugeben, deren Ableitung die Ausgangsfunktion ist. Ist f eine zu integrierende Funktion, dann nennen wir jede Funktion F , die

$$F'(x) = f(x)$$

erfüllt, eine **Stammfunktion** von f . Es ist dabei wichtig, nicht von *der* Stammfunktion zu sprechen, da es in der Regel beliebig viele gibt. Wenn wir die Funktion $f(x) = x^2$ nehmen, dann erkennen wir, dass $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ eine Stammfunktion von f ist, denn beim Ableiten von F erhielte man wieder f .

Allerdings wäre auch $F_1(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5$ eine Stammfunktion, denn die additive Konstante 5 fiel beim Differenzieren wiederum weg. Deswegen kann bei jeder Stammfunktion stets eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ addiert werden, ohne dass die neue Funktion die Stammfunktionseigenschaft verliert. Zwei verschiedene Stammfunktionen einer Funktion unterscheiden sich immer höchstens um eine Konstante. Die Menge aller Stammfunktionen wäre im Falle des Beispiels

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C, \quad \text{für alle } C \in \mathbb{R},$$

oder anders notiert:

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Es handelt sich bei dieser Schreibweise um ein **unbestimmtes Integral**, also um die Menge *aller* Stammfunktionen. Sie kennen bereits die geometrische Interpretation von **bestimmten Integralen**

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Ist $f(x) \geq 0$ in dem Bereich $x \in [a, b]$, dann nutzt man ein solches Integral zur Berechnung der Fläche, die der Graph von f im Intervall $[a, b]$ mit der x -Achse einschließt. Mit dem **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** kann man bestimmte Integrale berechnen:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

wobei F eine beliebige Stammfunktion von f ist. Wir merken uns also, dass ein unbestimmtes Integral die Menge aller Stammfunktionen liefert, während das bestimmte Integral eine Zahl ist, die über den Hauptsatz unter Verwendung einer Stammfunktion berechnet werden kann.

Wegen des uns bekannten Zusammenhangs zwischen Ableitung und Integral können wir wiederum einige Standardintegrale sammeln:

$f(x)$	1	$x^r, r \neq -1$	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	e^x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\int f(x) dx$	$x + C$	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + C$	$\ln(x) + C$	$x \ln(x) - x + C$	$e^x + C$	$-\cos(x) + C$	$\sin(x) + C$

Die Ermittlung einer Stammfunktion zu $f(x) = \ln(x)$ ist dabei keineswegs ein Standardintegral und hier aus Gründen der Vollständigkeit angegeben. Sie erlernen im Studium die Technik der *partiellen Integration*, mit der Sie auch solche Terme integrieren können. Als Übungsaufgabe können Sie die zweite Zeile der Tabelle differenzieren und sollten dabei auf die Funktionen in der ersten kommen. Analog zum Differenzieren gelten auch hier eine **Summenregel** und eine **Faktorregel**:

$$\begin{aligned}\int f(x) + g(x) dx &= \int f(x) dx + \int g(x) dx \\ \int s f(x) dx &= s \int f(x) dx\end{aligned}$$

Dabei ist $s \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante. Wir berechnen einige Beispiele:

$$\int \sqrt[3]{x} + \frac{2}{x^5} dx = \int x^{1/3} + 2x^{-5} dx = \frac{3}{4}x^{4/3} + \frac{2}{-4}x^{-4} + C = \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} - \frac{1}{2x^4} + C$$

$$\int \frac{2}{x} - 4 \sin(x) + 3 dx = 2 \ln(x) + 4 \cos(x) + 3x + C$$

$$\int_{-2}^2 -3x^5 dx = \left[-\frac{x^6}{2} \right]_{-2}^2 = -\frac{2^6}{2} - \left(-\frac{(-2)^6}{2} \right) = -2^5 + 2^5 = 0$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) dx = [\sin(x)]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2$$

Regeln für die Integration von Produkten und Verkettungen von Funktionen existieren zwar, sind jedoch wesentlich komplizierter als ihre Pendanten aus der Differentialrechnung und daher neuer Stoff in Ihrem Studium. Man kann beide Seiten der Produktregel für Ableitungen integrieren, was auf die Formel

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

führt. Dieses Prinzip nennt man **partielle Integration**. Für Verkettungen verwendet man die allgemeine **Substitutionsregel**, nach der

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy,$$

wobei $y = g(x)$, gilt. Aus der Schule kennen Sie eventuell schon die **lineare Substitution** für Funktionen des Typs $h(x) = f(ax + b)$ mit Parametern $a, b \in \mathbb{R}$. Es handelt sich bei h um eine

Verknüpfung der Funktion f mit der linearen Funktion $x \mapsto ax + b$. Ist F eine Stammfunktion von f , dann ist $\frac{1}{a}F(ax + b)$ eine Stammfunktion von $f(ax + b)$, denn

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{a} F(ax + b) = \frac{1}{a} \cdot a f(ax + b) = f(ax + b).$$

Die Stammfunktion einer Standardfunktion mit linearer Verkettung erhalten Sie also, indem Sie durch den Anstieg a des linearen Terms teilen, das Integral der Grundfunktion bilden und die Linearfunktion in dieses einsetzen:

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$$

So gelten etwa

$$\int e^{-3x+1} dx = -\frac{1}{3} e^{-3x+1} + C$$

und

$$\int_0^\pi \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) dx = \left[-\frac{\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} \right]_0^\pi = -\frac{\cos(2\pi + \frac{\pi}{2})}{2} - \left(-\frac{\cos(2 \cdot 0 + \frac{\pi}{2})}{2} \right) = 0 - 0 = 0.$$

Wir behandeln nun **Aufgabe 26**.

Die vielen Anwendungen der Differential- und Integralrechnung werden breiten Raum in Ihrem Studium einnehmen. Wir wünschen Ihnen in Ihrer Analysisvorlesung hierzu viel Erfolg!

Kapitel 11: Lineare Gleichungssysteme

Die Mathematik als Wissenschaft gliedert sich in diverse Unterdisziplinen, von denen die **Analysis** eine der Hauptkategorien bildet. Der Großteil dessen, was wir bisher behandelt haben, fällt unter Analysis - und Sie werden sich vermutlich mindestens für ein ganzes Semester diesem Teilgebiet widmen. Der zweite große Teil wird die **Lineare Algebra** sein, in der es um den Umgang mit linearen Abbildungen geht. Das Fundament der Linearen Algebra bilden **Lineare Gleichungssysteme** sowie deren Lösungsverfahren, der **Gauß-Algorithmus**. Dieser wird zwar im Studium originär behandelt, es wird aber aus der Schule vorausgesetzt, dass Sie ihn (oder ein gleichwertiges Lösungsverfahren) zumindest auf Systeme der Größen 2×2 und 3×3 anwenden können. Diese Kenntnisse frischen wir nun auf.

Ein 2×2 -Gleichungssystem dürfte Ihnen erstmalig in der neunten Klasse begegnet sein. Es hat die Gestalt

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

mit Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und der rechten Seite $(e, f)^T \in \mathbb{R}^2$. Ihre Aufgabe besteht im Allgemeinen darin, alle Lösungspaare (x, y) zu ermitteln, für die beide Gleichungen erfüllt sind. Wenn beispielsweise das System

$$\begin{aligned} 3x - y &= 8 \\ 6x + y &= 19 \end{aligned}$$

gegeben ist, dann fallen Ihnen sicher die drei gängigen Lösungsmethoden für Lineare Gleichungssysteme ein: das **Einsetzungsverfahren**, das **Gleichsetzungsverfahren** und das **Additionsverfahren**. Sie können die erste Gleichung zu $y = 3x - 8$ umformen und in die zweite Gleichung einsetzen. Das liefert

$$6x + 3x - 8 = 19 \implies 9x = 27,$$

woraus Sie schnell $x = 3$ ablesen können. Damit folgt auch $y = 3 \cdot 3 - 8 = 1$ und Sie erhalten mit dem Einsetzungsverfahren das Lösungspaar $(x, y) = (3, 1)$. Oder aber Sie formen die zweite Gleichung zu $y = 19 - 6x$ um und setzen diese mit der ersten nach y umgestellten Gleichung gleich, was Sie auf

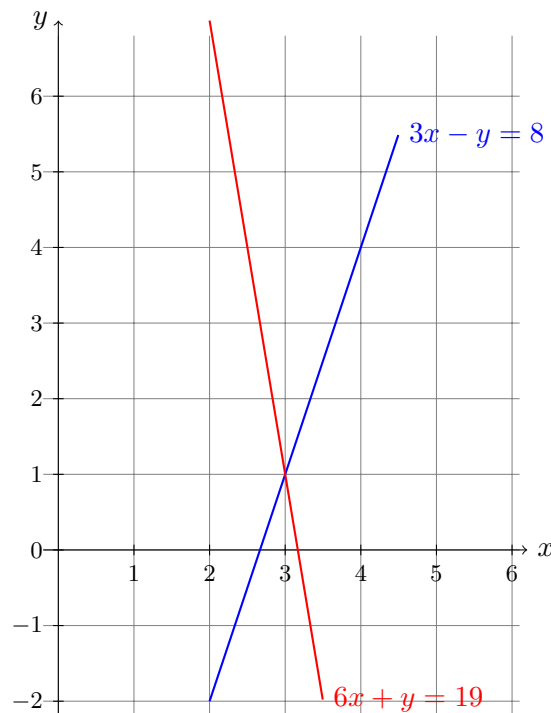
$$3x - 8 = 19 - 6x \implies 9x = 27$$

führt. Von hier an geht es mit dem Gleichsetzungsverfahren wie bei dem ersten weiter. Eine weitere Möglichkeit zur Lösung dieses Systems liegt darin, beide Gleichungen zu addieren. Dabei addieren Sie sowohl die linken Seiten als auch die rechten Seiten. Die neue Gleichung lautet

$$9x = 27.$$

Wir haben sie bereits zwei Mal gesehen. Auf diese Weise führt das Additionsverfahren zum Ziel.

Während dieses Beispiel eine gewisse Gleichwertigkeit der Verfahren suggerieren mag, werden Einsetzungs- und Gleichsetzungsverfahren gerade für größere Systeme unpraktikabel. Man arbeitet im Studium nahezu immer mit einer schematisierten Version des Additionsverfahrens, dem Gauß-Algorithmus. Bevor wir diesen jedoch vertiefen, wollen wir auf eine vierte Möglichkeit eingehen, (kleine) lineare Gleichungssysteme zu lösen: mit graphischen Darstellungen. Sie wissen bereits, dass eine Gleichung der Form $ax + by = c$, sofern nicht sowohl $a = 0$ und $b = 0$ sind, eine Gerade in der Ebene beschreibt. Zwei solcher Gleichungen sind entsprechend zwei Geraden. Die Lösungsmenge ergibt sich genau als Schnittmenge dieser beiden Geraden. Beispielsweise sieht die Darstellung unseres Zweiersystems wie folgt aus:



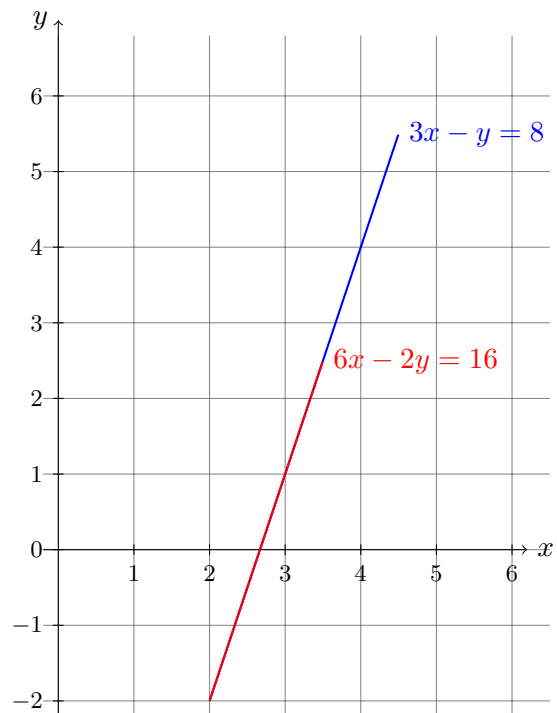
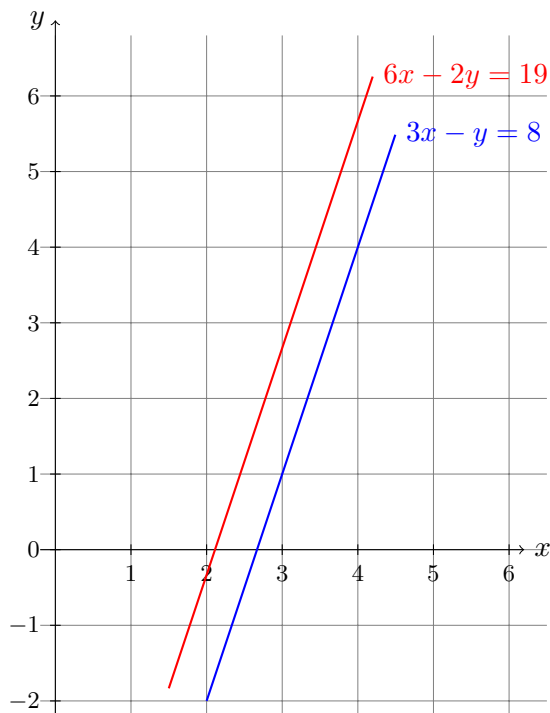
Zeichnerische Darstellungen ermöglichen uns auch ein Verständnis dafür, welche Fälle von Lösungsmengen auftauchen können. Zwei Geraden können sich schneiden, parallel zueinander oder sogar identisch sein. Wir wollen die beiden verwandten Systeme

$$\begin{aligned} 3x - y &= 8 \\ 6x - 2y &= 19 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 3x - y &= 8 \\ 6x - 2y &= 16 \end{aligned}$$

ebenfalls in ein Koordinatensystem eintragen und damit anschließend auf ihre Lösungen untersuchen.



Parallele Gerade wie im linken Bild haben keinerlei Schnittpunkte. Demzufolge kann das zugehörige Gleichungssystem auch keine Lösung haben. Man sagt, die Lösungsmenge ist **leer**. Andererseits zeigt das rechte Bild zwei identische Geraden. Damit sind alle Punkte auf dieser Geraden auch Elemente der Schnittmenge. Es gibt also eine unendliche Lösungsmenge bestehend aus allen Geradenpunkten. Diese **Trichotomie** der Fälle *eindeutige Lösung* wie beim ersten System sowie *keine Lösung* und *unendliche Lösungsmenge* wie bei den letzten beiden merken Sie sich bitte, denn auch für beliebig große Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$ tritt stets eine dieser drei Situationen auf.

Zum Abschluss wollen wir an einigen Beispielen den Gauß-Algorithmus auffrischen. Bevor wir dies tun, sammeln wir die Regeln, mit denen Sie die Gleichungen eines linearen Systems umformen dürfen.

Regel 1: Sie können eine Gleichung (das heißt beide Seiten) mit einer Zahl $\alpha \neq 0$ multiplizieren.

Regel 2: Sie können eine Gleichung zu einer anderen Gleichung hinzuaddieren.

Regel 3: Sie können die beiden vorherigen Regeln kombiniert anwenden.

Ein in besonders schöner Form gegebenes Gleichungssystem ist das folgende:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 12 \\ y + z &= 4 \\ 2z &= 4 \end{aligned}$$

Sie werden keine Schwierigkeiten haben, dieses System zu lösen, denn es lässt sich ja von unten nach oben aufrollen. Sie erhalten aus der untersten Zeile sofort $z = 2$. Setzen Sie dies in die mittlere Zeile ein, erhalten Sie $y = 2$. Nehmen Sie diese beiden Teillösungen mit in die erste Gleichung, kommen Sie schnell auf $x = 2$. Das Lösungstriplet lautet $(x, y, z) = (2, 2, 2)$. Wir wollen festhalten, was die Form dieses Systems so besonders macht. Sie haben von unten nach oben drei Gleichungen, mit wachsender Anzahl von Variablen: erst nur z , dann y und z und schließlich alle 3. Man nennt diese Form eines Gleichungssystems (etwas allgemeiner) auch **Dreiecksgestalt**. Sie ist für das Ablesen der Lösung besonders geeignet. Der Gauß-Algorithmus ist in der Lage, ein allgemeines System mit einer eindeutigen Lösung unter Ausnutzung der obigen drei Regeln in ein System in Dreiecksgestalt zu verwandeln, um es damit zu lösen.

Untersuchen wir das System

$$\begin{aligned}x + 2y + 2z &= 4 \\x + 3y + 3z &= 5 \\x + 4y + 3z &= 5.\end{aligned}$$

Der erste Schritt des Gaußverfahrens besteht nun darin, ein geeignetes Vielfaches der ersten Zeile zur zweiten und dann zur dritten Zeile zu addieren, um die nachfolgend fettgedruckten Ausdrücke zu eliminieren:

$$\begin{aligned}x + 2y + 2z &= 4 \\x + 3y + 3z &= 5 \\x + 4y + 3z &= 5\end{aligned}$$

Da wir x -Terme nur mit anderen x -Termen verrechnen können, bietet es sich an, das -1 -fache der ersten Zeile zur zweiten und dann zur dritten Zeile zu addieren, denn $-1x + x = 0$. Das -1 -fache der ersten Zeile lautet $-x - 2y - 2z = -4$. Wir müssen es komplett, das heißt auf beiden Seiten, zu den anderen Zeilen addieren. Wir erhalten

$$\begin{aligned}x + 2y + 2z &= 4 \\y + z &= 1 \\2y + z &= 1.\end{aligned}$$

Wenn wir dieses Zwischenresultat mit dem obigen Dreieckssystem vergleichen, dann stellen wir fest, dass nur noch der Ausdruck $2y$ in der dritten Zeile eliminiert werden muss. Dafür nehmen wir jedoch ein geeignetes Vielfaches der zweiten Zeile und nicht der ersten. Würden wir die erste Zeile nehmen, also ihr Vielfaches zur dritten addieren, dann würde wieder ein x -Term in der letzten Zeile auftauchen, was einem Rückschritt gleichkäme. Addieren wir also stattdessen das -2 -fache der zweiten Zeile zur dritten. Dieses -2 -fache lautet gerade $-2y - 2z = -2$. Addiert zur dritten Zeile erhalten wir das Dreieckssystem

$$\begin{aligned}x + 2y + 2z &= 4 \\y + z &= 1 \\-z &= -1.\end{aligned}$$

Man erhält sukzessive $z = 1$, $y = 0$ und $x = 2$. Wir wollen als letztes Beispiel das System

$$\begin{aligned}2x - y + 2z &= 1 \\4x + 2y - z &= -1 \\-2x - 3y + z &= -4\end{aligned}$$

lösen. Wiederum wird die erste Zeile verwendet, um zunächst die x -Terme in den unteren Zeilen wegzubekommen. Dieses Mal müssen unterschiedliche Vielfache verwendet werden. Sie nehmen das -2 -fache der ersten und addieren es zur zweiten Zeile. Anschließend nehmen Sie das 1 -fache der ersten Zeile und rechnen es zur dritten hinzu. Das führt auf

$$\begin{aligned}2x - y + 2z &= 1 \\4y - 5z &= -3 \\-4y + 3z &= -3.\end{aligned}$$

Letztlich muss $-4y$ aus der dritten Zeile eliminiert werden, indem ein passendes Vielfaches der zweiten Zeile zur dritten addiert wird. Es bietet sich an, das 1-fache der zweiten Zeile zur dritten zu addieren. Das liefert

$$\begin{aligned}2x - y + 2z &= 1 \\4y - 5z &= -3 \\-2z &= -6.\end{aligned}$$

Die Lösung $(x, y, z) = (-1, 3, 3)$ ergibt sich nun durch Lösung des Dreieckssystems von unten nach oben.

Wir behandeln nun **Aufgabe 27**.

Wir behandeln nun den **Abschlusstest**.

**Wir wünschen Ihnen viel Erfolg in Ihrem
Studium!**