Arch. Math., Vol. 65, 516–523 (1995)

0003-889X/95/6506-0516 $ 3.10/0

Faltungen von vollständig multiplikativen Funktionen

Von

JAN-CHRISTOPH PUCHTA und JÜRGEN SPILKER

1. Einleitung. Eine zahlentheoretische Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ heißt vollständig multiplikativ, wenn

$$f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$$

für je zwei natürliche Zahlen m, n und wenn $f(1) = 1$ gilt. Gilt die Gleichung nur für teilerfremde Paare, dann heißt f multiplikativ. Die Dirichlet-Faltung

$$(f * g)(n) = \sum_{d \mid n} f(d) \cdot g\left(\frac{n}{d}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

von zwei multiplikativen Funktionen ist multiplikativ. Die analoge Aussage für vollständig multiplikative Funktionen ist falsch. Wir nennen eine Funktion k-fach gefaltet, wenn sie die Dirichlet-Faltung von k vollständig multiplikativen Funktionen ist. Bezeichnet man mit $\mathscr{F}_k$ die Menge der k-fach gefalteten Funktionen und mit $\mathscr{M}$ die Menge der multiplikativen Funktionen, dann gilt

$$\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2 \subset \cdots \subset \mathscr{M}.$$

Wir wollen in unserer Arbeit die k-fach gefalteten Funktionen durch Determinanten charakterisieren (Abschnitt 2) und Rekursionsformeln für die Werte $f(p^n)$ durch die Werte $f(p), f(p^2), \ldots, f(p^k)$ herleiten (Abschnitt 3). Dabei benutzen wir die erzeugenden Potenzreihen zur Primzahl p („Bell-Reihen“) sowie lineare Gleichungssysteme für deren Koeffizienten.

Die hier behandelten Probleme sind für den Spezialfall $k = 2$ mit anderen Methoden dargestellt in P. J. McCarthy [4, Kapitel 1].

2. Charakterisierung der k-fach gefalteten Funktionen. Jeder zahlentheoretischen Funktion f kann man für jede Primzahl p eine formale Potenzreihe

$$f_p(X) := \sum_{l \geq 0} f(p^l) X^l$$

zuordnen. Offenbar gilt immer

$$(f * g)_p(X) = f_p(X) \cdot g_p(X).$$

Satz 1 ([1], Theorem 2.2). *Für jede multiplikative Funktion f und jedes $k \geqq 0$ gilt*

$$f \in \mathscr{F}_k \Leftrightarrow \forall p: f^{-1}(p^l) = 0 \quad \forall l > k\,.$$

Dabei ist $\mathscr{F}_0 := \{e\}$ mit $e(n) := 1$, falls $n = 1$ und 0, falls $n > 1$, und f^{-1} ist das Inverse von f bzgl. der Dirichlet-Faltung.

Beweis. 1) Sei $f = g_1 * g_2 * \cdots * g_k$ mit $g_i \in \mathscr{F}_1$. Dann gilt für jedes p

$$f_p(X) = \prod_{1 \leqq i \leqq k} (g_i)_p(X) = \frac{1}{\prod_{1 \leqq i \leqq k} (1 - g_i(p)X)}.$$

Folglich ist

$$(f^{-1})_p(X) = \prod_{1 \leqq i \leqq k} (1 - g_i(p)X)$$

ein Polynom vom Grad $\leqq k$.

2) Ist umgekehrt für jede Primzahl $(f^{-1})_p(X)$ ein Polynom vom Grad $\leqq k$ mit konstantem Term 1, dann gibt es $n \leqq k$ komplexe Zahlen $c_1(p), c_2(p), \ldots, c_n(p)$ mit

$$(f^{-1})_p(X) = \prod_{1 \leqq i \leqq n} (1 - c_i(p)X).$$

Definiert man vollständig multiplikative Funktionen g_i durch

$$g_i(p) := \begin{cases} c_i(p) & \text{falls } 1 \leqq i \leqq n \\ 0 & \text{falls } n < i \leqq k \end{cases}$$

für alle p, dann gilt

$$f_p(X) = \prod_{1 \leqq i \leqq k} \frac{1}{1 - g_i(p)X} = \prod_{1 \leqq i \leqq k} (g_i)_p(X), \quad \forall p\,,$$

also $f = g_1 * g_2 * \cdots * g_k$ mit vollständig multiplikativen g_i. $\square$

Die Funktionen $f \in \mathscr{F}_k$ lassen sich also dadurch charakterisieren, daß $\left(\sum_{l \geqq 0} f(p^l) X^l\right)^{-1}$ für jedes p ein Polynom vom Grad $\leqq k$ ist. Zum Beispiel ist die durch

$$f(p^l) := \begin{cases} 1 & l \equiv 0 \mod k \\ 0 & l \not\equiv 0 \mod k \end{cases}$$

definierte multiplikative Funktion k-fach gefaltet, denn

$$\sum_{l \geqq 0} f(p^l) X^l = \frac{1}{1 - X^k}.$$

Wir führen nun für jedes $f \in \mathscr{M}$ und jedes p die n-reihigen Matrizen

$$F_{m,n} := \begin{pmatrix} f(p^m) & f(p^{m-1}) & \cdots & f(p^{m-n+1}) \\ f(p^{m+1}) & f(p^m) & \cdots & f(p^{m-n+2}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(p^{m+n-1}) & f(p^{m+n-2}) & \cdots & f(p^m) \end{pmatrix}$$

ein; dabei ist $f(p^l) := 0$ falls $l < 0$ ist.

Hilfssatz 2. *Gegeben sei eine formale Potenzreihe* $1 + \sum_{l \geqq 1} f(p^l) X^l \neq 1$ *und* $k \in \mathbb{N}$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *Das Reziproke der Potenzreihe ist ein Polynom vom Grad* $\leqq k$.
(2) $\exists 1 \leqq n \leqq k: \det F_{1,n} \neq 0,\ \det F_{m,n+1} = 0,\quad \forall m \geqq 1.$

Beweis. Dies folgt aus [6], Kapitel VII, Aufgaben 17–19: Die Behauptung (2) $\Rightarrow$ (1) ist gerade Aufgabe 18.

Aufgabe 17 besagt

$$(1) \Rightarrow \exists n \leqq k: \det F_{1,n} \neq 0,\ \det F_{1,n+1} = 0,$$

mit der Rekursionsformel von Aufgabe 19 folgt hieraus sofort die Behauptung für beliebige $m \geqq 1$. □

Folgerung 3. *Für alle* $m, n \geqq 1$ *sind die* n *Gleichungen*

$$f(p^l) + f(p^{l-1}) a_1 + \cdots + f(p^{l-n}) a_n = 0, \quad m \leqq l < m + n$$

äquivalent zu der Matrizengleichung

$$F_{m,n} = F_{m-1,n} A; \quad \textit{dabei ist}$$

$$A := \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -a_{k-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_k & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus Satz 1 und Hilfssatz 2 folgt sofort die 2. Charakterisierung von k-fach gefalteten Funktionen:

Satz 4. *Sei* f *eine multiplikative Funktion und* $k \geqq 1$. *Dann gilt:*
$f \in \mathscr{F}_k \Leftrightarrow$ *für alle* p *mit* $f(p^l) \neq 0$ *für mindestens ein* $l \geqq 1$ *gilt:*

$$\exists 1 \leqq n_p \leqq k: \det F_{1,n_p} \neq 0, \quad \det F_{m,n_p+1} = 0, \quad \forall m \geqq 1.$$

Es gibt noch eine andere Folge von Determinanten, deren Verschwinden k-fach gefaltete Funktionen charakterisiert, nämlich $\det F_{1,n} =: d_n$:

Satz 5. *Für jedes* $f \in \mathscr{M}$ *und* $k \geqq 1$ *gilt:*

$$f \in \mathscr{F}_k \Leftrightarrow \forall p \quad \forall n > k: d_n = 0.$$

Beweis. 1) Das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lclclclclcl} f(p) a_0 & + & a_1 & & & & & & & = & 0 \\ f(p^2) a_0 & + & f(p) a_1 & + & a_2 & & & & & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & & & & & \vdots \\ f(p^k) a_0 & + & f(p^{k-1}) a_1 & + & \cdots & + & f(p) a_{k-1} & + & a_k & = & 0 \\ f(p^{k+1}) a_0 & + & f(p^k) a_1 & + & \cdots & + & f(p^2) a_{k-1} & + & f(p) a_k & = & 0 \end{array}$$

in $k+1$ Gleichungen und $k+1$ Unbekannten hat eine nichttriviale Lösung $a_0 = 1$, $a_1, \ldots, a_k$, somit gilt $d_{k+1} = 0$. Wegen $\mathscr{F}_k \subseteqq \mathscr{F}_{n-1}$ für alle $n > k$ folgt nach dem schon Bewiesenen $d_n = 0$.

2) Gegeben sei $f \in \mathscr{M}$ mit $d_n = 0$, $\forall p$, $\forall n > k$. Definiere eine multiplikative Funktion g durch

$$g(p^l) := \begin{cases} -\sum\limits_{0 \leqq j < l} g(p^j) f(p^{l-j}), & l \leqq k \\ 0 & , \quad l > k. \end{cases}$$

Nach Satz 1 ist $f' := g^{-1}$ k-fach gefaltet, somit nach dem schon bewiesenen Teil $d_l(f') = 0$ für alle $l > k$. Indem man $d_l(f) = 0$ und $d_l(f') = 0$ nach der letzten Zeile entwickelt und $f(p^l) = f'(p^l)$, $\forall l \leqq k$ benutzt, erkennt man induktiv $f(p^l) = f'(p^l)$, $\forall l > k$. Also ist $f = f'$ k-fach gefaltet. □

Die Matrizen $F_{1,n}$ haben zwar meist eine größere Reihenanzahl als die in Satz 4 auftretenden, dafür lassen sich aber die Determinanten explizit berechnen.

Hilfssatz 6. *Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ komplexe Zahlen. Die Determinante der n-reihigen Matrix*

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

hat den Wert

$$d_n = (-1)^n \sum_{\substack{l_1, \ldots, l_n \geqq 0 \\ l_1 + 2l_2 + \cdots + nl_n = n}} (-1)^{\sum_i l_i} \frac{\left(\sum_i l_i\right)!}{\prod_i l_i!} \prod_i a_i^{l_i}.$$

Beweis. [6], S. 711. □

Wegen dieses Hilfssatzes ist Satz 5 äquivalent zu

Satz 7. *Sei f multiplikativ und $k \geqq 1$. Dann gilt:*

$$f \in \mathscr{F}_k \Leftrightarrow \forall p \quad \forall n > k: \sum_{\substack{l_1, l_2, \ldots, l_n \geqq 0 \\ l_1 + 2l_2 + \cdots + nl_n = n}} (-1)^{\sum_i l_i} \frac{\left(\sum_i l_i\right)!}{\prod_i l_i!} \prod_i f(p^i)^{l_i} = 0.$$

Beispiel. Für $f = 1$ erhält man für alle $n > 1$ die Formel

$$\sum_{\substack{l_1 + 2l_2 + \cdots + nl_n = n \\ \sum_i l_i \equiv 0 \bmod 2}} \frac{\left(\sum_i l_i\right)!}{\prod_i l_i!} = \sum_{\substack{l_1 + 2l_2 + \cdots + nl_n = n \\ \sum_i l_i \equiv 1 \bmod 2}} \frac{\left(\sum_i l_i\right)!}{\prod_i l_i!},$$

d. h. die Anzahl der ungeordneten Partitionen einer Zahl $n > 1$ mit einer geraden Anzahl von Summanden ist ebenso groß wie die mit einer ungeraden Anzahl.

3. Rekursionsformeln für k-fach gefaltete Funktionen. Aus dem vorigen Abschnitt ist ersichtlich, daß sich bei einer k-fach gefalteten Funktion f und einer Primzahl p die Werte $f(p^n)$ mit $n > k$ prinzipiell aus den niederen Potenzen berechnen lassen. Wir wollen das jetzt tun.

Erste Rekursionsformeln ergeben sich unmittelbar aus Satz 5, indem man die Determinanten $\det F_{1n} = d_n$ nach der letzten Zeile entwickelt:

Satz 8. *Für $f \in \mathscr{M}$ und $k \geqq 1$ gilt:*

$$f \in \mathscr{F}_k \Leftrightarrow \forall p \quad \forall n > k : f(p^n) = f(p^{n-1})d_1 - f(p^{n-2})d_2 \pm \cdots + (-1)^{k-1} f(p^{n-k})d_k .$$

Im Spezialfall $k = 2$ erhält man die bekannte Bedingung ([3], Theorem 1):

$$\forall p \quad \forall n > 2 : f(p^n) = f(p^{n-1})f(p) - f(p^{n-2})(f(p)^2 - f(p^2)) .$$

Will man für $f \in \mathscr{F}_k$ die Werte $f(p^n)$ explizit durch $f(p), f(p^2), \ldots, f(p^k)$ ausdrücken, dann ist es zweckmäßig, wieder die Matrix A einzuführen. Nach Satz 1 und Folgerung 3 ist für multiplikative f die Aussage $f \in \mathscr{F}_k$ äquivalent mit

$$\forall p \quad \forall n \geqq 1 : F_{n,k} = F_{n-1,k} A .$$

Hieraus ergeben sich die Rekursionsformeln

$$\forall n \geqq 1 : F_{n,k} = F_{0,k} A^n .$$

Satz 9. *Sei $f \in \mathscr{M}$, $k \geqq 1$, $A := F_{0,k}^{-1} F_{1,k}$. Dann ist äquivalent:*

$$f \in \mathscr{F}_k \Leftrightarrow \forall p \quad \forall n \geqq 2 : F_{n,k} = F_{0,k} A^n .$$

Zusatz. *Für $f \in \mathscr{F}_k$ gilt:*

1) $f \in \mathscr{F}_{k-1} \Leftrightarrow \forall p : a_k = 0$
$\Leftrightarrow \forall p : \det A = 0$.

2) In der ersten Zeile von A^n stehen dieselben Elemente wie in $F_{n,k}$, also $f(p^n)$, $f(p^{n-1}), \ldots, f(p^{n-k+1})$. Damit hat man eine Rekursionsformel für $f(p^n)$, ausgedrückt durch $f(p), f(p^2), \ldots, f(p^k)$. Im Spezialfall $k = 2$ lassen sich die Potenzen von A explizit berechnen:

Hilfssatz 10. *Sei $A := \begin{pmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt für alle $n \geqq 2$:*

$$A^n = \begin{pmatrix} b_n & b_{n-1} \\ -a_2 b_{n-1} & -a_2 b_{n-2} \end{pmatrix},$$

wobei

$$b_n := \sum_{0 \leqq 2i \leqq n} (-1)^{n-i} \binom{n-i}{i} a_1^{n-2i} a_2^i .$$

Bemerkung. Wegen $b_n = f(p^n)$ haben wir eine bekannte explizite Darstellung von $f(p^n)$ durch a_1, a_2, also $f(p)$, $f(p^2)$ erhalten ([1] Theorem 4.2), nämlich

$$f(p^n) = \sum_{0 \leqq 2i \leqq n} (-1)^i \binom{n-i}{i} f(p)^{n-2i} (f(p)^2 - f(p^2))^i .$$

Beweis durch Induktion über n: Der Anfang $n = 2$ ist trivial. Wegen

$$\begin{aligned} A A^n &= \begin{pmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n & b_{n-1} \\ -a_2 b_{n-1} & -a_2 b_{n-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -a_1 b_n - a_2 b_{n-1} & -a_1 b_{n-1} - a_2 b_{n-2} \\ -a_2 b_n & -a_2 b_{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

genügt es für den Induktionsschluß

$$b_n = -a_1 b_{n-1} - a_2 b_{n-2}$$

zu zeigen, was ebenfalls mit Induktion geht. □

Beispiele. Für die Teilerfunktion $\sigma_l := \mathrm{id}^l * 1$, die τ-Funktion von Ramanujan (Definition und $\tau \in \mathscr{F}_2$ siehe [4], S. 67) und $\beta := \lambda * \mathrm{id}$ ([4], S. 25) bekommt man die für alle Primzahlen p und natürlichen n gültigen Identitäten:

$$\sigma_l(p^n) = \sum_{0 \leqq 2i \leqq n} (-1)^i \binom{n-i}{i} (p^l + 1)^{n-2i} p^{li} ,$$

$$\tau(p^n) = \sum_{0 \leqq 2i \leqq n} (-1)^i \binom{n-i}{i} \tau(p)^{n-2i} p^{11i} ,$$

$$\beta(p^n) = \sum_{0 \leqq 2i \leqq n} \binom{n-i}{i} (p-1)^{n-2i} p^i .$$

Wir wollen abschließend für k-fach gefaltete Funktionen $f \in \mathscr{F}_k$ noch weitere Rekursionsformeln herleiten. Wir setzen dazu $F_n := F_{n,k}$ und berechnen

$$F_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ f(p) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f(p^{k-1}) & f(p^{k-2}) & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ f^{-1}(p) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f^{-1}(p^{k-1}) & f^{-1}(p^{k-2}) & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Aus den Grundgleichungen

$$F_n = F_{n-1} A \quad \forall n \geqq 1 ,$$

erhalten wir $F_{l+m} = F_l A^m$, $F_m = F_0 A^m$ und den

Satz 11. *Für alle $f \in \mathscr{F}_k$ und $l, m \geqq 1$ gilt $F_{l+m} = F_l F_0^{-1} F_m$.*

Wir berechnen das Element in der linken, oberen Ecke.

$$f(p^{l+m}) = (f(p^{l-1}), f(p^{l-2}), \ldots, f(p^{l-k}))\, F_0^{-1} \begin{pmatrix} f(p^{m+1}) \\ f(p^{m+2}) \\ \vdots \\ f(p^{m+k}) \end{pmatrix}$$

$$= (f(p^l), f(p^{l-1}), \ldots, f(p^{l-k})) \begin{pmatrix} 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & F_0^{-1} \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(p^m) \\ f(p^{m+1}) \\ \vdots \\ f(p^{m+k}) \end{pmatrix}.$$

Wegen $(f^{-1} * f)(p^{j+m}) = 0$ ist dies gleich

$$= -(f(p^l), f(p^{l-1}), \ldots, f(p^{l-k})) \begin{pmatrix} 1 & f^{-1}(p) & \cdots & f^{-1}(p^k) \\ f^{-1}(p) & f^{-1}(p^2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f^{-1}(p^k) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(p^m) \\ f(p^{m-1}) \\ \vdots \\ f(p^{m-k}) \end{pmatrix}$$

$$= - \sum_{\substack{i,j \geqq 0 \\ i+j \leqq k}} f(p^{l-i}) f(p^{m-j}) f^{-1}(p^{i+j}).$$

Die Glieder mit $i = 0$ und $j = 0$ kann man wegen der trivialen Gleichungen $(f * f^{-1})(p^m) = 0$ und $(f * f^{-1})(p^l) = 0$ streichen und erhält den

Satz 12. *Für jedes $f \in \mathscr{F}_k$ und $l, m \geqq 1$ gilt:*

$$f(p^{l+m}) = f(p^l) f(p^m) - \sum_{2 \leqq j \leqq k} f^{-1}(p^j) \sum_{1 \leqq i < j} f(p^{l-i}) f(p^{m-j+i}).$$

Bemerkung. Den Spezialfall $k = 2$ findet man in [4], S. 22.

Wir danken dem Referenten für seinen Hinweis auf die Bücher [5] und [6], durch die unsere Arbeit verkürzt werden konnte.

Literaturverzeichnis

[1] T. B. CARROLL and A. A. GIOIA, On a subgroup of the group of multiplicative arithmetic functions. J. Austral. Math. Soc. Ser. A **20**, 348–358 (1975).

[2] A. A. GIOIA, On an identity for multiplicative functions. Amer. Math. Monthly **69**, 988–991 (1962).
[3] P. J. MCCARTHY, Busche-Ramanujan identities. Amer. Math. Monthly **67**, 966–970 (1960).
[4] P. J. MCCARTHY, Introduction to arithmetical functions, Berlin-Heidelberg-New York 1986.
[5] T. MUIR, A treatise on the theory of determinants, Dover 1960.
[6] G. PÓLYA and G. SZEGÖ, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Berlin-Heidelberg-New York 1971.

Eingegangen am 22. 3. 1995

Anschrift der Autoren:

J.-C. Puchta
J. Spilker
Mathematisches Institut
der Albert-Ludwigs-Universität
Hebelstr. 29
D-79104 Freiburg