Matrizen und Skalarprodukte in der Konditorei

Prof. Dr. Michael Dreher

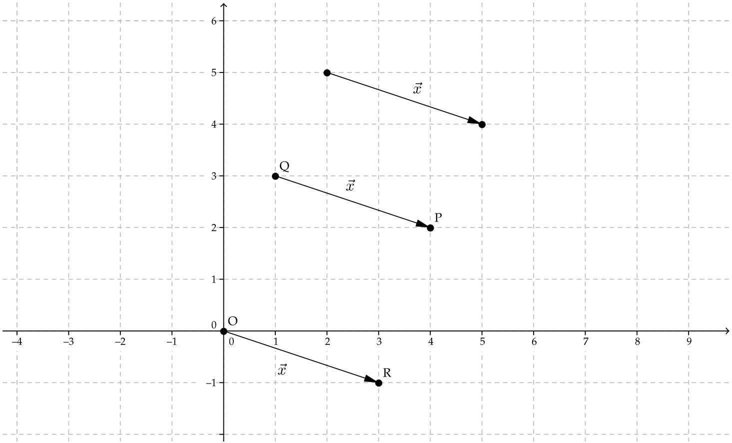
Universität Rostock

9. Juni 2018

Teil I

Vektoren

Was ist ein Vektor



Wo kommen Vektoren vor

- Verschiebungen in Ebene und Raum
- Kräfte
- Geschwindigkeiten
- elektrische und magnetische Felder

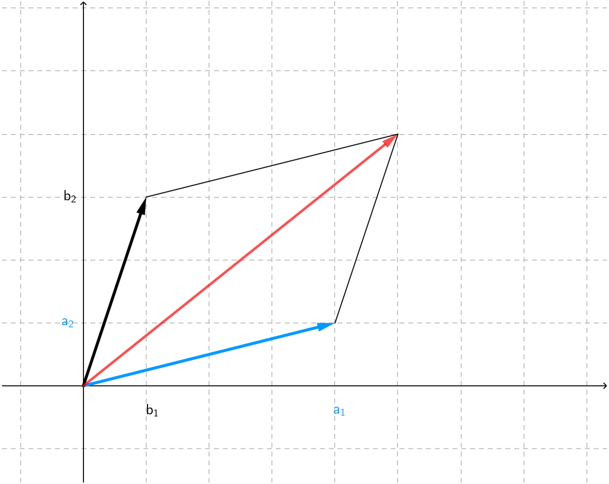
Wo kommen Vektoren vor

- Verschiebungen in Ebene und Raum
- Kräfte
- Geschwindigkeiten
- elektrische und magnetische Felder

und dort, wo man sie nicht erwartet

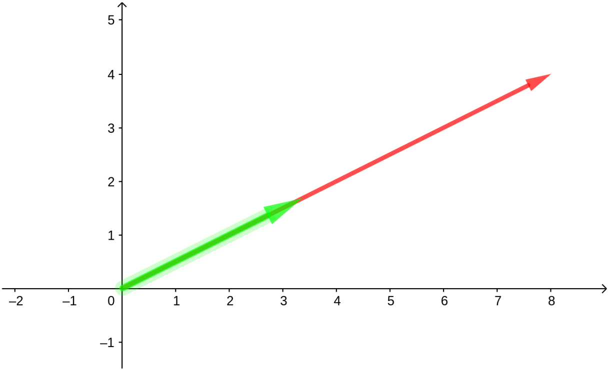
Wie rechnet man mit Vektoren

Vektor plus Vektor ergibt Vektor:



Wie rechnet man mit Vektoren

Zahl mal Vektor ergibt Vektor:

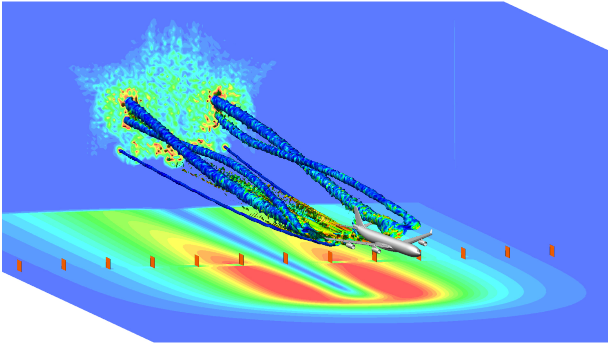


Andere Beispiele für Vektoren

- Lagerbestand in einem Baumarkt
- Neuzugänge der Waren und verkaufte Mengen
- Preise der einzelnen angebotenen Artikel

Noch mehr Beispiele für Vektoren

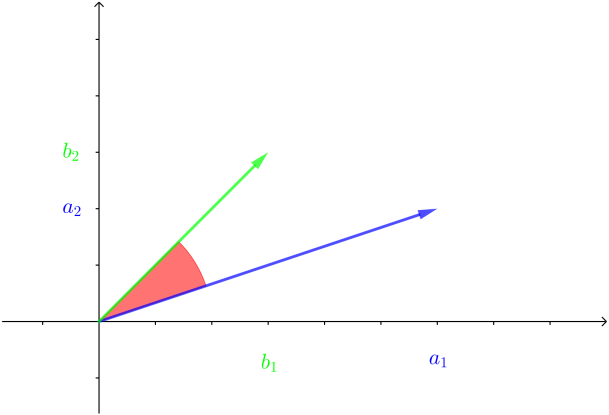
Simulation der Wirbelschleppen bei einem Airbus A340



Quelle: Deutsches Zentrum für Luft und Raumfahrt

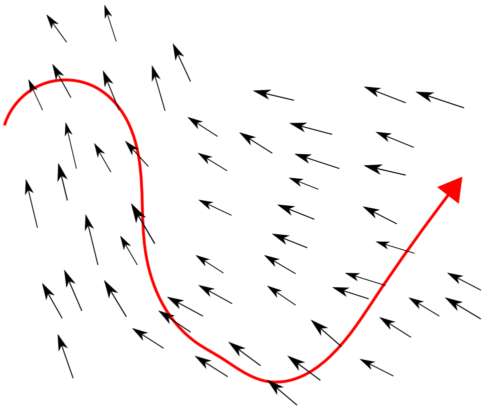
Skalarprodukte von Vektoren

Vektor mal Vektor ergibt Zahl



$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}\cos\gamma$$

Bestimmung der mechanischen Arbeit:

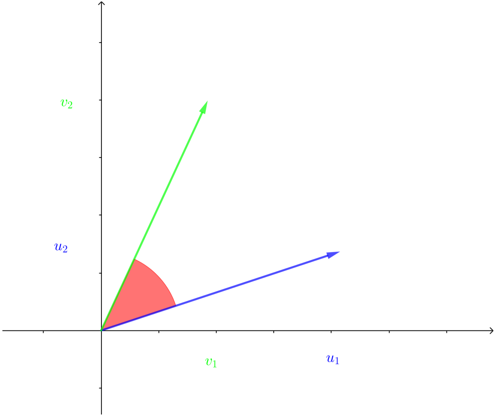


Skalarprodukte im Supermarkt

Tom kauft 3 Tafeln Schokolade zu je 0.79€, 2 Packungen Brot zu 0.89€ und gibt 5 Pfandflaschen ab (jeweils 0.25€).

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.79€ \\ 0.89€ \\ -0.25€ \end{pmatrix} = 2.90€$$

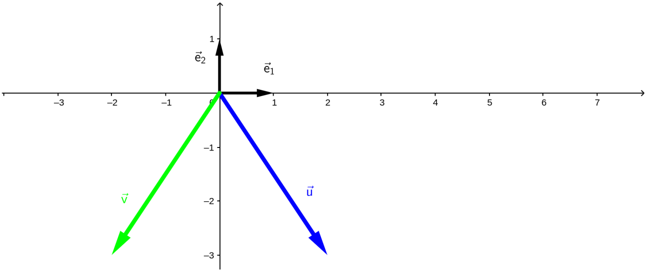
Weitere Operationen mit Vektoren: Drehungen



$$v_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Weitere Operationen mit Vektoren: Spiegelung



$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Teil II

Matrizen

Was ist eine Matrix

Definition

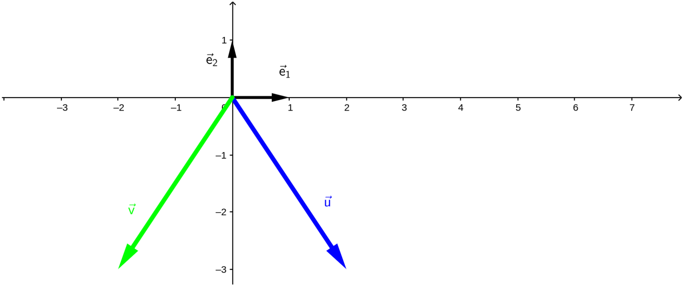
Ein rechteckiges Zahlenschema (mindestens 1 Spalte, mindestens 1 Zeile) heißt *Matrix*. Falls A p Zeilen und q Spalten hat, schreiben wir

$$A \in \mathbb{R}^{p \times q}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}.$$

Matrizen mit genau einer Spalte heißen *Vektoren*. Anstelle von $A \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ schreiben wir gelegentlich $\vec{a} \in \mathbb{R}^p$,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{pmatrix}^\top.$$

Noch einmal die Spiegelung



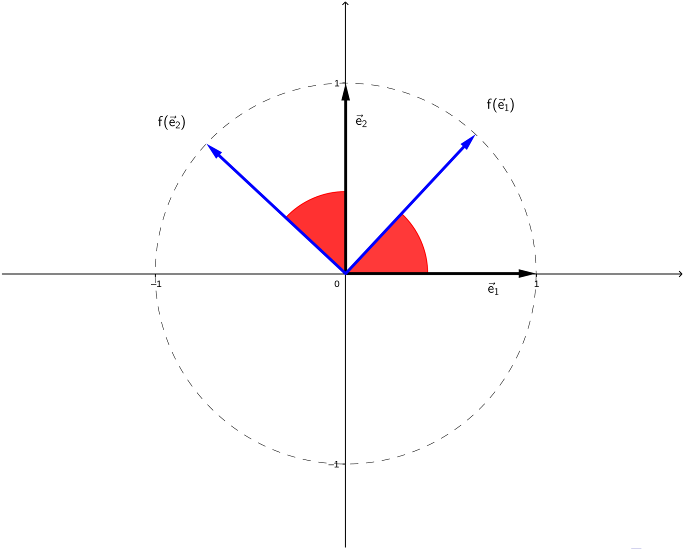
$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Wie bestimmt man eine Matrix zu einer Abbildung

Die Spalten der Abbildungsmatrix sind die Koordinaten der Bilder der Basisvektoren.



Teil III

Konditorei

Kuchen und deren Zutaten

Eine Konditorei bäckt zwei Sorten Kuchen jeden Tag, mit folgenden Zutaten:

	Mehl	Butter	Zucker	Eier
Sorte 1	0.4 kg	0.2 kg	0.25 kg	4
Sorte 2	0.3 kg	0.2 kg	0.5 kg	5

Kuchen und deren Zutaten

Eine Konditorei bäckt zwei Sorten Kuchen jeden Tag, mit folgenden Zutaten:

	Mehl	Butter	Zucker	Eier
Sorte 1	0.4 kg	0.2 kg	0.25 kg	4
Sorte 2	0.3 kg	0.2 kg	0.5 kg	5

Am Montag werden 800 Kuchen gebacken,
355 von Sorte 1 und 445 von Sorte 2.
Wieviel Zutaten werden aus dem Vorratsraum entnommen ?

$$\begin{aligned}
\text{Mehl}: &\quad 0.4\,\text{kg} \cdot 355 + 0.3\,\text{kg} \cdot 445 = 275.5\,\text{kg} \\
\text{Butter}: &\quad 0.2\,\text{kg} \cdot 355 + 0.2\,\text{kg} \cdot 445 = 160\,\text{kg} \\
\text{Zucker}: &\quad 0.25\,\text{kg} \cdot 355 + 0.5\,\text{kg} \cdot 445 = 311.25\,\text{kg} \\
\text{Eier}: &\quad 4 \cdot 355 + 5 \cdot 445 = 3645
\end{aligned}$$

Kuchen und deren Zutaten

Wieviel Zutaten werden aus dem Vorratsraum entnommen für 355 Kuchen von Sorte 1 und 445 Kuchen von Sorte 2 ?

Kompakte Notation:

$$\begin{pmatrix} 0.4\,\mathrm{kg} & 0.3\,\mathrm{kg} \\ 0.2\,\mathrm{kg} & 0.2\,\mathrm{kg} \\ 0.25\,\mathrm{kg} & 0.5\,\mathrm{kg} \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 355 \\ 445 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 275.5\,\mathrm{kg} \\ 160\,\mathrm{kg} \\ 311.25\,\mathrm{kg} \\ 3645 \end{pmatrix}.$$

Das sind drei Matrizen. Wir ignorieren gelegentlich die Kilos.

Wir brauchen Abkürzungen

Rezeptmatrix R und Bestellvektor $\vec{b}$ und Zutatenvektor $\vec{z}$:

$$R = \begin{pmatrix} 0.4\,\text{kg} & 0.3\,\text{kg} \\ 0.2\,\text{kg} & 0.2\,\text{kg} \\ 0.25\,\text{kg} & 0.5\,\text{kg} \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 355 \\ 445 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 275.5\,\text{kg} \\ 160\,\text{kg} \\ 311.25\,\text{kg} \\ 3645 \end{pmatrix}.$$

Dann haben wir $R \cdot \vec{b} = \vec{z}$ mit $R \in \mathbb{R}^{4\times 2}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ und $\vec{z} \in \mathbb{R}^4$.

Jetzt allgemeiner Bestellvektor

Betrachte Bestellvektor $\vec{b} = \binom{b_1}{b_2}$ mit unbestimmten b_1, b_2:

Der Zutatenvektor ist

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} 0.4\,\text{kg} & 0.3\,\text{kg} \\ 0.2\,\text{kg} & 0.2\,\text{kg} \\ 0.25\,\text{kg} & 0.5\,\text{kg} \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4\,\text{kg} \cdot b_1 + 0.3\,\text{kg} \cdot b_2 \\ 0.2\,\text{kg} \cdot b_1 + 0.2\,\text{kg} \cdot b_2 \\ 0.25\,\text{kg} \cdot b_1 + 0.5\,\text{kg} \cdot b_2 \\ 4 \cdot b_1 + 5 \cdot b_2 \end{pmatrix},$$

und das können wir nicht weiter zusammenfassen,
weil b_1 und b_2 unbestimmt sind.

Zusammenfassen geht nicht, aber trennen:

$$\begin{aligned}
\vec{z} = R \cdot \vec{b} &= \begin{pmatrix} 0.4\,\text{kg} \cdot b_1 + 0.3\,\text{kg} \cdot b_2 \\ 0.2\,\text{kg} \cdot b_1 + 0.2\,\text{kg} \cdot b_2 \\ 0.25\,\text{kg} \cdot b_1 + 0.5\,\text{kg} \cdot b_2 \\ 4 \cdot b_1 + 5 \cdot b_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0.4\,\text{kg} \cdot b_1 \\ 0.2\,\text{kg} \cdot b_1 \\ 0.25\,\text{kg} \cdot b_1 \\ 4 \cdot b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.3\,\text{kg} \cdot b_2 \\ 0.2\,\text{kg} \cdot b_2 \\ 0.5\,\text{kg} \cdot b_2 \\ 5 \cdot b_2 \end{pmatrix} \\
&= b_1 \cdot \begin{pmatrix} 0.4\,\text{kg} \\ 0.2\,\text{kg} \\ 0.25\,\text{kg} \\ 4 \end{pmatrix} + b_2 \cdot \begin{pmatrix} 0.3\,\text{kg} \\ 0.2\,\text{kg} \\ 0.5\,\text{kg} \\ 5 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Was haben wir hier gerechnet ?

$$\vec{z} = R \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b_1 \cdot \begin{pmatrix} 0.4\,\mathrm{kg} \\ 0.2\,\mathrm{kg} \\ 0.25\,\mathrm{kg} \\ 4 \end{pmatrix} + b_2 \cdot \begin{pmatrix} 0.3\,\mathrm{kg} \\ 0.2\,\mathrm{kg} \\ 0.5\,\mathrm{kg} \\ 5 \end{pmatrix} .$$

Das ist

- b_1 mal die erste Spalte von R,
- plus b_2 mal die zweite Spalte von R.

Wir verallgemeinern unsere Beobachtung:

Das Matrix–Vektor–Produkt

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$$

bedeutet folgendes:

- wir nehmen die erste Spalte von A, multipliziert mit x_1,
- dann die zweite Spalte von A, multipliziert mit x_2,
- dann die dritte Spalte von A, multipliziert mit x_3,
- und so weiter,
- und dann die q-te Spalte von A, multipliziert mit x_q,

und schließlich addieren wir diese q Produkte (jedes Produkt ist ein Vektor aus dem $\mathbb{R}^p$).

Die Kosten der Zutaten:

	Mehl	Butter	Zucker	Ei
Kosten	$0.50\,\frac{€}{\text{kg}}$	$6.00\,\frac{€}{\text{kg}}$	$1.20\,\frac{€}{\text{kg}}$	$0.15€$

Wir schreiben das als Kostenmatrix:

$$K := \begin{pmatrix} 0.50\,\frac{€}{\text{kg}} & 6.00\,\frac{€}{\text{kg}} & 1.20\,\frac{€}{\text{kg}} & 0.15€ \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix $K \in \mathbb{R}^{1\times 4}$ hat eine Zeile und vier Spalten.

Materialkosten am Montag, erste Methode:

Wir kennen die nötigen Zutaten für 355 bzw. 445 Kuchen:

$$\vec{z} = R \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 275.5\,\text{kg} \\ 160\,\text{kg} \\ 311.25\,\text{kg} \\ 3645 \end{pmatrix}.$$

Die Gesamtkosten $\text{Sum}_{\text{total}}$ sind also

$$\begin{aligned} &= 0.5\,\tfrac{€}{\text{kg}} \cdot 275.5\,\text{kg} + 6\,\tfrac{€}{\text{kg}} \cdot 160\,\text{kg} \\ &\qquad + 1.2\,\tfrac{€}{\text{kg}} \cdot 311.25\,\text{kg} + 0.15€ \cdot 3645 \\ &= 137.75€ + 960€ + 373.50€ + 546.75€ \end{aligned}$$

Oder auch $\quad \text{Sum}_{\text{total}} = K \cdot \left(R \cdot \vec{b}\right).$

Materialkosten am Montag, erste Methode:

Wir kennen die nötigen Zutaten für 355 bzw. 445 Kuchen:

$$\vec{z} = R \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 275.5\,\text{kg} \\ 160\,\text{kg} \\ 311.25\,\text{kg} \\ 3645 \end{pmatrix}.$$

Die Gesamtkosten $\text{Sum}_{\text{total}}$ sind also

$$\begin{aligned} &= 0.5\,\tfrac{€}{\text{kg}} \cdot 275.5\,\text{kg} + 6\,\tfrac{€}{\text{kg}} \cdot 160\,\text{kg} \\ &\qquad + 1.2\,\tfrac{€}{\text{kg}} \cdot 311.25\,\text{kg} + 0.15€ \cdot 3645 \\ &= 137.75€ + 960€ + 373.50€ + 546.75€ \\ &= 2018.00€. \end{aligned}$$

Oder auch $\quad \text{Sum}_{\text{total}} = K \cdot \left(R \cdot \vec{b}\right).$

Materialkosten am Montag, zweite Methode, I:

Materialkosten für einen Kuchen der Sorte 1:

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 0.5\,\frac{€}{\mathrm{kg}} & 6\,\frac{€}{\mathrm{kg}} & 1.2\,\frac{€}{\mathrm{kg}} & 0.15€ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.4\,\mathrm{kg} \\ 0.2\,\mathrm{kg} \\ 0.25\,\mathrm{kg} \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= 0.5\,\frac{€}{\mathrm{kg}} \cdot 0.4\,\mathrm{kg} + 6\,\frac{€}{\mathrm{kg}} \cdot 0.2\,\mathrm{kg} + 1.2\,\frac{€}{\mathrm{kg}} \cdot 0.25\,\mathrm{kg} + 0.15€ \cdot 4 \\
&= 0.20€ + 1.20€ + 0.30€ + 0.60€ \\
&= 2.30€.
\end{aligned}
$$

Materialkosten am Montag, zweite Methode, II:

Materialkosten für einen Kuchen der Sorte 2:

$$\begin{pmatrix} 0.5\,\frac{€}{\mathrm{kg}} & 6\,\frac{€}{\mathrm{kg}} & 1.2\,\frac{€}{\mathrm{kg}} & 0.15€ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.3\,\mathrm{kg} \\ 0.2\,\mathrm{kg} \\ 0.5\,\mathrm{kg} \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= 0.5\,\frac{€}{\mathrm{kg}} \cdot 0.3\,\mathrm{kg} + 6\,\frac{€}{\mathrm{kg}} \cdot 0.2\,\mathrm{kg} + 1.2\,\frac{€}{\mathrm{kg}} \cdot 0.5\,\mathrm{kg} + 0.15€ \cdot 5$$

$$= 0.15€ + 1.20€ + 0.60€ + 0.75€$$

$$= 2.70€.$$

Materialkosten am Montag, zweite Methode, III:

Die Materialkosten für jeweils einen Kuchen sind dann

$$K \cdot R = \begin{pmatrix} 0.5\,\frac{€}{\text{kg}} & 6\,\frac{€}{\text{kg}} & 1.2\,\frac{€}{\text{kg}} & 0.15€ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.4\,\text{kg} & 0.3\,\text{kg} \\ 0.2\,\text{kg} & 0.2\,\text{kg} \\ 0.25\,\text{kg} & 0.5\,\text{kg} \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2.30€ & 2.70€ \end{pmatrix}.$$

Es gibt 355 bzw. 445 Kuchen von Sorte 1 bzw. Sorte 2:

$$\begin{pmatrix} 2.30€ & 2.70€ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 355 \\ 445 \end{pmatrix} = 2.30€ \cdot 355 + 2.70€ \cdot 445 = 2018.00€,$$

zusammengefaßt haben wir

$$\text{Sum}_{\text{total}} = \big(K \cdot R\big) \cdot \begin{pmatrix} 355 \\ 445 \end{pmatrix} = \big(K \cdot R\big) \cdot \vec{b}.$$

Vergleich beider Rechenmethoden:

Wir haben jedesmal das Ergebnis 2018.00€ erhalten.

Als Formel:

$$K \cdot \left(R \cdot \vec{b}\right) = \left(K \cdot R\right) \cdot \vec{b}.$$

Das Matrix–Matrix–Produkt ist assoziativ.

Ggf. lesen wir Vektoren als Matrix mit einer Spalte.

Was bedeutet das alles ?

Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{r \times q}$ erzeugt
eine Abbildung von $\mathbb{R}^q$ nach $\mathbb{R}^r$.

Drei Beispiel dazu:

Die Matrix R: mit der Zutaten–pro–Kuchen–Matrix $R \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ errechnen wir die Zutaten $\vec{z} \in \mathbb{R}^4$ aus dem Bestellungsvektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$.

Die Matrix K: mit der Kosten–pro–Zutat–Matrix $K \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$ errechnen wir die Kosten (als Vektor des $\mathbb{R}^1$, d.h. als Zahl) aus dem Zutatenvektor $\vec{z} \in \mathbb{R}^4$.

Die Matrix KR: mit der Kosten–pro–Kuchen–Matrix $KR \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ errechnen wir die Materialkosten (als Vektor des $\mathbb{R}^1$, d.h. als Zahl) aus dem Bestellungsvektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$.

Genießen Sie den Kuchen !