

Schockwellen und Reaktions–Diffusionsgleichungen

Michael Dreher
Fachbereich für Mathematik und Statistik
Universität Konstanz

Sommersemester 2009 (fortlaufend ergänzt)

Inhaltsverzeichnis

1	Überblick	5
2	Modellierung	7
2.1	Erhaltungsgleichungen	7
2.2	Euler- und Lagrange-Koordinaten	11
2.3	Erhaltungsgleichungen für Massen und Impulse	15
2.4	Erhaltungsgleichungen für die Energie	19
2.5	Zusammenfassung	21
3	Schockwellen	23
3.1	Charakteristiken	23
3.2	Gradientenkatastrophen	24
3.3	Schwache Lösungen	25
3.4	Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen	31
3.5	Evolutionsgleichungen	36
3.6	Viskositätslösungen	38
3.7	Schock-Ungleichungen und Irreversibilität	40
3.8	Das Riemann-Problem für Systeme von Erhaltungsgleichungen	41
3.9	Das Glimm-Schema	42
4	Reaktions-Diffusionsgleichungen	43
4.1	Allgemeines	43
4.2	Diffusionsgleichungen	46
4.3	Dispersion	48
4.4	Lösungsbegriffe	50
4.5	Die KPP-Gleichung	51
4.6	Die viskose Gleichung von BURGERS	55
4.7	Die KORTEVEG – DE VRIES – Gleichung	56

Kapitel 1

Überblick

Wir betrachten Prozesse mit folgenden typischen Eigenschaften:

unendlich viele Freiheitsgrade:

- Strömung eines Gases: jedes Molekül unabhängig von den anderen
- Verkehrssimulation auf Autobahn
- Populationen bei ökologischen Modellen

Wechselwirkungen zwischen den Teilchen des Systems:

- z.B. Anziehung/Abstoßung bei Molekülen eines Gases
- Populationsmodelle: Ressourcenkonkurrenz bzw. Fraßfeindschaften

Die Konsequenz aus den unendlich vielen Freiheitsgraden besteht darin, daß wir es mit partiellen Differentialgleichungen anstatt gewöhnlicher Differentialgleichungen zu tun haben.

Die Konsequenz aus der Wechselwirkung ist, daß die Differentialgleichungen automatisch *nichtlinear* sind.

Es gibt unterschiedliche Typen von Prozessen:

reversible Prozesse: z.B. Wellen und Schwingungen

irreversible Prozesse: z.B. chemische Reaktionen, Wärmeausbreitung, Alterungsprozesse (nun ja)

stationäre Zustände: diese ändern sich im Zeitverlauf nicht mehr.

Diesen unterschiedlichen Typen entsprechen (im Allgemeinen) unterschiedliche Differentialgleichungen:

- reversible Prozesse \implies hyperbolische Differentialgleichungen
- irreversible Prozesse \implies parabolische Differentialgleichungen
- stationäre Zustände \implies elliptische Differentialgleichungen

Das Verhalten der Lösungen dieser Differentialgleichungen ist dann ebenfalls unterschiedlich:

parabolisch: Singularitäten der Lösung (z.B. Knicke) verschwinden im zeitlichen Verlauf (sofortige Glättung)

hyperbolisch: keine Glättung, stattdessen können (vor allem durch die Nichtlinearitäten) Sprung-Unstetigkeiten sich nach einiger Zeit ergeben, obwohl zum Ausgangszeitpunkt $t = 0$ die gesuchte Funktion sehr glatt war

elliptisch: die Glattheit der Lösung hängt direkt von der Glattheit der äußeren Einflüsse ab.

Und auch die Nichtlinearitäten können neuartige Effekte hervorbringen:

- evtl. existiert die Lösung nur für eine begrenzte Zeit (Explosion, „blow-up“)
- evt. werden Singularitäten nach einiger Zeit geboren (z.B. Entstehung eines Staus, Schockwellen, Meereswellen am Strand, Wirbel in der Gasdynamik)

Kapitel 2

Modellierung

2.1 Erhaltungsgleichungen

$t \in \mathbb{R}$: Zeit

$x \in \mathbb{R}$: Ortsvariable

\mathbb{R}_x -Achse soll Objekte einer gewissen Quantität Q enthalten (z.B. Teilchen, Fahrzeuge, Energie, ...)

$u = u(t, x)$ sei die Dichte für Q , d.h., daß $\int_{x=a}^b u(t, x) dx$ die Anzahl der Q im Ortsintervall $[a, b]$ zur Zeit t beschreibt.

Wie kann sich $\int_{x=a}^b u(t, x) dx$ ändern, wenn t läuft ?

- Objekte Q können bei b oder bei a das Intervall verlassen oder betreten.
- Objekte Q können im Innern des Intervalls entstehen oder vernichtet werden.

Verwende Flußfunktion $\phi = \phi(t, x)$. Diese beschreibt, wieviele Elemente Q eine Markierung am Ort x überschreiten pro Zeiteinheit in Richtung wachsender Ortsvariable. Wenn $\phi(t, x) > 0$, dann Strömung nach rechts, und wenn $\phi(t, x) < 0$, dann Strömung nach links.

Verwende Quellfunktion $f = f(t, x)$. Diese beschreibt die Menge der pro Zeiteinheit und Ortseinheit geborenen Elemente Q am Ort x zur Zeit t . Dann ist $\int_{x=a}^b f(t, x) dx$ die Anzahl der in $[a, b]$ zur geborenen Objekte Q pro Zeiteinheit zur Zeit t .

Insgesamt folgt:

$$\frac{d}{dt} \int_{x=a}^b u(t, x) dx = -\phi(t, b) + \phi(t, a) + \int_{x=a}^b f(t, x) dx.$$

Jetzt setzen wir voraus (solange, bis wir etwas Gegenteiliges sagen): u und ϕ seien in beiden Variablen stetig differenzierbar. Die Quellfunktion f sei in beiden Variablen stetig.

Dann folgt

$$\int_{x=a}^b u_t(t, x) dx = \int_{x=a}^b (-\phi_x(t, x) + f(t, x)) dx$$

oder auch

$$\int_{x=a}^b (u_t(t, x) + \phi_x(t, x) - f(t, x)) dx = 0.$$

Der Integrand ist eine stetige Funktion von x , wenn wir t als Parameter ansehen. Dann erlaubt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung eine Differentiation nach b , und es folgt die Kontinuitätsgleichung:

$$u_t(t, x) + \phi_x(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad (2.1)$$

unter der Voraussetzung, daß u_t sowie ϕ_x und f stetig sind.

Gleichungen dieser Art heißen *Erhaltungsgleichungen*.

Schwierigkeit: wir haben eine gegebene Funktion (nämlich f), aber zwei gesuchte Funktionen (u und ϕ), aber nur eine Gleichung.

Ausweg: Zusammenhang zwischen u und ϕ , häufig als *Materialgleichung* oder *konstitutive Gleichung bezeichnet*. Damit ist gemeint, daß man durch physikalische Annahmen einen Zusammenhang $\phi = \phi(u)$ einer ganz bestimmten Art voraussetzt. In diesen Fällen bekommt man dann

$$u_t + \phi'(u)u_x = f,$$

und hier sieht man die Nichtlinearität.

Außerhalb von Biologie/Chemie ist oft $f = 0$.

Als Beispiele haben wir:

Burgers' Gleichung: mit $\phi(u) = u^2/2$ ist dann $u_t + uu_x = 0$.

Advektionsgleichung: dies ist der Prototyp einer hyperbolischen Gleichung erster Ordnung. Sei $\phi(u) = cu$ mit einer reellen Konstanten c . Dann ist $u_t + cu_x = 0$.

viskose Burgers' Gleichung: diese lautet $u_t + uu_x - Du_{xx} = 0$, und hier können wir $\phi = u^2/2 - Du_x$ sowie $f = 0$ setzen, oder $\phi = u^2/2$ und $f = Du_{xx}$ als Quellterm auffassen.

die Gleichung von Kortevæg und deVries: diese lautet $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$, und wir können setzen $\phi = u^2/x + u_{xx}$. Diese Gleichung tritt z.B. bei der Beschreibung von Flachwasserwellen auf.

Als einfachstes Beispiel betrachten wir die Advektionsgleichung (auch Driftgleichung oder Transportgleichung genannt):

$$u_t(t, x) + cu_x(t, x) = 0, \quad u(0, x) = u_0(x),$$

wobei c und u_0 gegeben sind. Wir wählen ein $x_0 \in \mathbb{R}$ und setzen $v(t) = u(t, x_0 + ct)$, und dann erhalten wir $v'(t) = 0$ für alle t . Also ist $v(t) = v(0) = u_0(x_0)$, und somit bekommen wir nach der Substitution $x = x_0 + ct$ die Lösungsdarstellung

$$u(t, x) = u_0(x - ct).$$

Diese Rechnung war bisher nur formal, aber wenn wir $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ voraussetzen, dann beobachten wir $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Wir erhalten also die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung, und noch dazu eine Lösungsdarstellung.

Die Größe c nennt man auch Ausbreitungsgeschwindigkeit, und man redet von einer *wandernden Welle* bzw. *travelling wave solution*.

Als Erkenntnis nehmen wir mit, daß man für eine Erhaltungsgleichung nur eine Anfangsbedingung zur Zeit $t = 0$ stellen sollte (und nicht etwa mehrere).

Wenn wir zurückgehen zur Burgers'-Gleichung $u_t + uu_x = 0$, dann ist (in einer naiven Vorstellung) die Ausbreitungsgeschwindigkeit c jetzt gleich $u(t, x)$, also würde dann die Lösung Wellenbestandteile enthalten, die unterschiedlich schnell laufen. Nun kann man sich vorstellen, daß diese einander überholen, und für eine solche Situation werden wir später kennenlernen, daß dann ein *Schock* eintritt.

Als weiteres Beispiel betrachten wir einen (Spielzeug-)Reaktor, der durch das Intervall $(0, L) \subset \mathbb{R}_x$ dargestellt sein soll. Am Rand $x = 0$ tritt ein Stoff A ein, dessen Konzentration beschrieben wird durch $a = a(t, x)$, und wir nehmen einen kontinuierlichen Durchfluß an: $\phi(t, x) = ca(t, x)$, wobei $c > 0$ die gegebene Transportgeschwindigkeit sein soll. Der Stoff A reagiert zu B , und am Ende $x = L$ tritt ein Gemisch von A und B aus. Z.B. sei die Reaktion ein einfacher Zerfallsprozeß. Dann haben wir die Differentialgleichung

$$a_t(t, x) + ca_x(t, x) = -ka(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times (0, L)$$

zusammen mit der Anfangsbedingung $a(0, x) = a_0(x)$.

Analog zur Drift-Gleichung wählen wir uns einen Punkt $x_0 \in (0, L)$ aus und betrachten $v(t) = a(t, x_0 + ct)$ als Hilfsfunktion. Dann ist $v'(t) = -kv(t)$, aber nur solange $x := x_0 + ct$ innerhalb $(0, L)$ verbleibt. Für diese x haben wir dann $a(t, x) = \exp(-kt)a_0(x - ct)$, und es stellt sich die Frage, wie man für die $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times (0, L)$ mit $x - ct < 0$ die Lösung bestimmt. Die Antwort liegt in einer zusätzlichen Randbedingung am Punkt $x = 0$:

$$a(t, 0) = g(t), \quad t \in \mathbb{R}_{\geq 0},$$

wobei g gegeben sein soll. Es sollte sinnvollerweise die Kompatibilitätsbedingung $g(0) = a_0(0)$ gelten.

Zu $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times (0, L)$ mit $x - ct < 0$ bestimmen wir ein $t_0 \in \mathbb{R}_+$, sodaß (t, x) und $(t_0, 0)$ auf derselben Geraden $x - ct = \text{const.}$ liegen. Dann ist $c(t - t_0) = x$, und somit finden wir

$$a(t, x) = \exp(-k(t - t_0))a(t_0, 0) = \exp(-kx/c)g(t - x/c)$$

als Lösungsdarstellung.

Als Erkenntnis halten wir fest: bei einer Drift-Gleichung benötigen wir zusätzlich zur Anfangsbedingung bei $t = 0$ noch eine Randbedingung am „Zufuhrbrand“, aber nicht am „Abflußbrand“, denn dann wäre das Problem überbestimmt.

Schließlich betrachten wir das Phänomen der *Diffusion*.

Sei Wasser in einem Kanal ruhend, und an einer Stelle wird Tinte hineingeschüttet, die dann diffundiert. Sei $u = u(t, x)$ die Konzentration der Tinte.

Wir wissen schon, daß $u_t + \phi_x = f$ ist. Weil keine Tinte nachgeschüttet wird, ist $f \equiv 0$. Wie hängen nun ϕ und u zusammen?

Es ist plausibel, daß dort wo u stark schwankt, der Fluß ϕ diese Schwankung ausgleichen sollte. Das würde dann bedeuten, daß

$$\phi = -Du_x$$

mit einer positiven Diffusionskonstanten D . Wir bekommen dann

$$u_t(t, x) - Du_{xx}(t, x) = 0,$$

und dies ist der Prototyp einer parabolischen Gleichung.

Wenn zusätzlich noch das Wasser strömt mit einer Geschwindigkeit c , dann kommen wir auf die *Drift-Diffusionsgleichung*

$$u_t + cu_x - Du_{xx} = 0.$$

Diese ist parabolisch (auch wenn sie hyperbolische Anteile enthält).

Weiterhin betrachten wir eine *Verkehrsflußsimulation*. Sei dazu $x \in \mathbb{R}$, und $u = u(t, x)$ die Fahrzeugdichte (im Sinne von Kfz./Kilometer). Dann gilt natürlich $u_t + \phi_x = f$. Im Falle einer Autobahn ist $f \equiv 0$. Der Fluß ϕ ist gegeben durch

$$\phi(t, x) = u(t, x)v(t, x),$$

wobei $v = v(t, x)$ die Geschwindigkeit der Fahrzeuge beschreibt. Dann hat ϕ die korrekte Einheit Kfz./Stunde.

Wir nehmen an:

- bei freier Autobahn ($u \approx 0$) fährt jeder Verkehrsteilnehmer mit bekannter Geschwindigkeit v_1 ,
- bei verstopfter Autobahn ($u \approx u_1$) bricht der Verkehr zusammen, also $v = 0$,

- dazwischen besteht ein linearer Zusammenhang zwischen v und u .

Das führt uns auf

$$v = v_1 - \frac{v_1}{u_1}u,$$

und somit ist dann

$$\phi = v_1 \left(u - \frac{u^2}{u_1} \right),$$

und die Erhaltungsgleichung lautet dann

$$u_t + v_1 \left(1 - 2 \frac{u}{u_1} \right) u_x = 0.$$

Schließlich betrachten wir den Fall von Erhaltungsgleichungen im höherdimensionalen Fall. Dann ist $x \in \mathbb{R}^n$, und es sei wie bisher $u = u(t, x)$ die Dichte für die Quantität Q . Mit Ω bezeichnen wir eine offene, beschränkte Teilmenge von \mathbb{R}^n , die einen glatten Rand haben solle. Dann ist $\int_{\Omega} u(t, x) dx$ die Anzahl der Objekte Q zur Zeit t im Gebiet Ω .

Die Bilanzgleichung lautet dann

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t, x) dx = - \int_{\partial\Omega} \phi(t, x) \cdot \vec{\nu} d\sigma + \int_{\Omega} f(t, x) dx,$$

wobei $\phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ den Fluß beschreibt. Genauso wie im eindimensionalen Fall setzen wir auch jetzt voraus, daß u und ϕ einmal stetig differenzierbar bezüglich (t, x) sind, und f sei stetig. Dann bekommen wir

$$\int_{\Omega} u_t(t, x) dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \phi(t, x) dx + \int_{\Omega} f(t, x) dx,$$

oder auch

$$\int_{\Omega} \left(u_t + \operatorname{div} \phi - f \right) dx = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Der Integrand ist stetig, und Ω ist frei wählbar. Wenn zu einer Zeit t_0 an einem Punkt x_0 der Integrand positiv wäre, dann auch in einer kleinen Umgebung von x_0 zur selben Zeit, und wir können Ω gleich dieser kleinen Umgebung wählen. Das ergibt einen Widerspruch, und genauso können wir argumentieren, wenn der Integrand irgendwo negativ sein sollte. Also bekommen wir die Erhaltungsgleichung:

$$u_t(t, x) + \operatorname{div} \phi(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}. \quad (2.2)$$

Die Verknüpfung zwischen u und ϕ erfolgt wieder über *Materialgesetze*. Für die Wärmeleitungsgleichung bekommen wir z.B. das *Fourier-Gesetz*

$$\phi = -D\nabla u,$$

was dann auf die parabolische Gleichung $u_t - D \Delta u = f$ führt.

Eine andere Variante besteht darin, eine kleine Verzögerung zwischen dem Reiz $-\nabla u$ und der Reaktion ϕ anzunehmen:

$$\phi(t + \tau, x) = -D\nabla u(t, x),$$

wobei $0 < \tau \ll 1$. Dies ergibt dann allerdings direkt keine Differentialgleichung, wegen der Zeitverschiebung. Aber wir können eine Taylor-Entwicklung annehmen,

$$\phi(t + \tau, x) = \phi(t, x) + \phi_t(t, x) \cdot \tau + \mathcal{O}(\tau^2),$$

und nun liegt der Gedanke nahe, das Restglied zu ignorieren. Dann erhalten wir das System

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div} \phi = f, \\ \tau \phi_t + \phi + D\nabla u = 0. \end{cases}$$

Wenn wir die Differenzierbarkeitsannahmen um eine Ordnung verschärfen, dann können wir dieses System zweier Differentialgleichungen für zwei Funktionen zu einer einzelnen Gleichung für eine gesuchte Funktion umformen und bekommen

$$\tau \phi_{tt} + \phi_t + D\nabla(-\operatorname{div} \phi + f) = 0,$$

was eine hyperbolische Differentialgleichung ist.

2.2 Euler- und Lagrange-Koordinaten

Sei $x \in \mathbb{R}^n$, und im \mathbb{R}^n soll ein Fluid bzw. ein kontinuierliches Medium sein. Zur Zeit t_0 füllt dieses das Gebiet Ω_0 aus, und zur Zeit $t > t_0$ das Gebiet Ω .

Das Teilchen, was zur Zeit t_0 an der Stelle $a \in \Omega_0$ war, bewegt sich zur Stelle $x \in \Omega$ zur Zeit t .

Wir haben dann die Transformation

$$\begin{aligned} \Phi: \Omega_0 &\rightarrow \Omega, \\ \Phi: a &\mapsto x. \end{aligned}$$

Voraussetzungen: Φ ist bijektiv, stetig differenzierbar, und die Umkehrabbildung ist auch stetig differenzierbar (also ist Φ ein C^1 -Diffeomorphismus).

Weiterhin ist Φ' gleich der Jacobi-Matrix, die in diesem Falle invertierbar ist. Wir setzen voraus, daß $\det \Phi' > 0$ überall in Ω_0 gilt.

Für zwei nahe beieinander liegende Punkte $a, a_0 \in \Omega_0$ ist dann

$$\Phi(a) = \Phi(a_0) + \Phi'(a_0) \cdot (a - a_0) + \mathfrak{o}(\|a - a_0\|).$$

Definition 2.1. Der Vektor $u(a) = \Phi(a) - a$ heißt Verschiebungsvektor bzw. displacement vector.

Beispiele:

starrer Körper: dann ist $x = \Phi(a) = L \cdot a + c$ mit einer Drehmatrix L , also $L^\top = L^{-1}$ und $\det L = 1$, und einem Verschiebungsvektor c . Also $u(a) = (L - I)a + c$ und $\nabla \Phi = L$.

lineare Dehnung: mit (e_1, e_2, e_3) als kartesischer Standardbasis im \mathbb{R}^3 wird eine Dehnung in e_1 -Richtung beschrieben durch

$$x_1 = \lambda a_1, \quad x_2 = a_2, \quad x_3 = a_3,$$

wobei $\lambda > 1$. Es ist dann

$$\nabla \Phi = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + I.$$

Scherung: es wird in Diagonalenrichtung gezogen, und in einer entsprechenden Querrichtung zieht sich das Material zusammen:

$$x_1 = a_1 + \varrho a_2, \quad x_2 = a_2 + \varrho a_1, \quad x_3 = a_3, \quad \varrho > 0.$$

Damit folgt $u(a) = (\varrho a_2, \varrho a_1, 0)^\top$ sowie

$$\nabla \Phi = \begin{pmatrix} 0 & \varrho & 0 \\ \varrho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Als Randbemerkung fügen wir an, daß jede Deformation Φ lokal zerlegt werden kann in diese drei Grundtypen, bis auf Restterme $\mathfrak{o}(\|a - a_0\|)$.

Jetzt führen wir eine Zeitvariable t ein sowie ein Laborkoordinatensystem mit Ursprung O und Basisvektoren e_1, e_2, e_3 .

Dann haben wir für gewählte t_0 und $t \geq t_0$

$$\begin{aligned}\Phi(\cdot, t, t_0) &: \Omega_0 \rightarrow \Omega_t, \\ \Phi(\cdot, t, t_0) &: a \mapsto \Phi(a, t, t_0) =: x.\end{aligned}$$

Die Funktion $\Phi(t, t_0) = \Phi(\cdot, t, t_0)$ beschreibt die Bewegung beim Übergang von t_0 zu t , und als Axiome verlangen wir:

- $\Phi(t, t) = \text{id}$ für alle t ,
- $\Phi(t', t) \circ \Phi(t, t_0) = \Phi(t', t_0)$, für alle t', t, t_0 ,
- die Abbildung $(t, a) \mapsto \Phi(a, t, t_0)$ ist von der Regularität C^1 .

Das Teilchen, was zur Zeit t_0 in a war, bewegt sich entlang der Bahnkurve (*Trajektorie*) $\{\Phi(a, t, t_0) : t \in I\}$, wobei I das für uns interessante Zeitintervall ist.

Definition 2.2. Die Geschwindigkeit dieses Teilchens in bezug auf das Laborkoordinatensystem ist

$$U = U(t, x) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(a, t, t_0), \quad \text{wenn } x = \Phi(a, t, t_0).$$

Diese Geschwindigkeit ist unabhängig von t_0 .

Definition 2.3. Die Beschleunigung dieses Teilchens in bezug auf das Laborkoordinatensystem ist

$$\gamma = \gamma(t, x) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(a, t, t_0), \quad \text{wenn } x = \Phi(a, t, t_0).$$

Beim Konzept der Geschwindigkeit hält man sich an einem Teilchen fest und läßt die Zeitvariable t laufen.

Beim Konzept der *Stromlinien* verfährt man genau andersherum: die Zeit t ist eingefroren, und man schaut sich von allen jetzt anwesenden Teilchen die Geschwindigkeitsvektoren an.

Definition 2.4. Eine Kurve in Ω_t heißt Stromlinie, wenn die Tangente an jeden ihrer Punkte x parallel zu $U(t, x)$ ist.

Dies entspricht der Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\frac{dx_1}{U_1(t, x_1, x_2, x_3)} = \frac{dx_2}{U_2(t, x_1, x_2, x_3)} = \frac{dx_3}{U_3(t, x_1, x_2, x_3)},$$

wobei hier immer $t = \text{const.}$ ist.

Stromlinien und Trajektorien sind genau dann identisch, wenn die Strömung stationär ist, das heißt $U = U(x)$ ist unabhängig von t .

Die *Lagrange*-Beschreibung ist wie folgt: Wir betrachten ein ganz konkretes Teilchen, das zur Zeit 0 an der Position $a \in \Omega_0$ war, und das zur Zeit t an der Position $x = \Phi(a, t, 0) \in \Omega_t$ ist. Die Geschwindigkeit ist dann $\partial_t \Phi(a, t, 0)$, und die Beschleunigung ist $\partial_t^2 \Phi(a, t, 0)$.

Es stellt sich natürlich die Frage, warum man sich zur Zeit t erinnern sollte, wer zum Zeitpunkt 0 (der möglicherweise lange zurückliegt) sich wo aufhielt.

Die Euler-Beschreibung vermeidet diesen Rückgriff auf den Anfangszeitpunkt. Zur Zeit t haben wir ein Geschwindigkeitsfeld $U = U(t, x)$. Dieses beschreibt den Geschwindigkeitsvektor des Flusses am Ort $x \in \Omega_t$ zur Zeit t . Wenn dieses U für alle (t, x) bekannt ist, dann kann man die Trajektorien daraus gewinnen, indem man das Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx}{dt} = U(t, x)$$

rückwärts löst, so den Anfangspunkt $a \in \Omega_0$ ermittelt, und dann ist $x = \Phi(a, t, 0)$.

Dafür haben wir jetzt mehr Aufwand zu treiben, um die Beschleunigung eines Teilchens zu ermitteln (und es wird nicht $\partial_t U$ herauskommen).

Wir betrachten dazu ein Teilchen M , das zur Zeit 0 in a war und zur Zeit t in x ist. Sei $F = F(t, M)$ eine Funktion, die sich auf dieses Teilchen bezieht, z.B. die Geschwindigkeit oder die Beschleunigung. Wir können die Ortsvariablen als a oder als x ausdrücken, und so bekommen wir

$$F(t, M) = G(t, a) = H(t, x), \quad \text{wenn } x = \Phi(a, t, 0).$$

Definition 2.5. Die Euler-Ableitungen von F sind

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(t, x), \quad \frac{\partial H}{\partial t}(t, x),$$

und die Lagrange-Ableitungen von F sind

$$\frac{\partial G}{\partial a_i}(t, a), \quad \frac{\partial G}{\partial t}(t, a).$$

Letztere Zeitableitung schreibt man gelegentlich auch als $\frac{dH}{dt}$ oder $\frac{DH}{dt}$, mit d anstatt ∂ , und spricht von der totalen Ableitung.

Zur Umrechnung vermerken wir, daß

$$F(t, M) = G(t, a) = H(t, \Phi(a, t, 0)),$$

und somit ist dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial a_j} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \Phi_k}{\partial a_j}, \\ \frac{\partial G}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_k} \cdot U_k(t, x) \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} + (U \cdot \nabla)H, \end{aligned}$$

wobei sich ∇ immer auf Ortsvariablen bezieht, nie auf t .

Für die Suche nach der Beschleunigung ist $G(t, a) = \partial_t \Phi(a, t, 0)$ und $H(t, x) = U(t, x)$, und somit ist

$$\gamma(t, x) = \frac{\partial U}{\partial t}(t, x) + (U(t, x) \cdot \nabla)U(t, x)$$

die Beschleunigung in Euler-Koordinaten.

Jetzt wollen wir uns Bilanzgleichungen anschauen, aber über einem beweglichen Gebiet. Wir setzen also

$$K(t) := \int_{\Omega_t} C(t, x) dx$$

für eine skalare Funktion C und fragen nach $K'(t)$.

Wir beginnen mit einem Hilfsergebnis:

Lemma 2.6. Sei $B = B(t)$ eine $n \times n$ -Matrix, die zweimal stetig nach dem Parameter t differenzierbar und immer invertierbar ist.

Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial t} \det B(t_0) = (\det B(t_0)) \operatorname{spur} (B^{-1}(t_0) \cdot B'(t_0))$$

Hierbei ist $\operatorname{spur} C = \sum_l C_{ll}$ die Summe der Diagonalelemente, und demnach $\operatorname{spur}(PQ) = \sum_l (PQ)_{ll} = \sum_{l,k} P_{lk} Q_{kl}$ für Matrizen P und Q .

Beweis. Taylorentwicklung für B :

$$\begin{aligned} B(t) &= B(t_0) + B'(t_0)(t - t_0) + \mathcal{O}((t - t_0)^2) \\ &= B(t_0) \cdot \left(I + B^{-1}(t_0)B'(t_0)(t - t_0) + \mathcal{O}((t - t_0)^2) \right). \end{aligned}$$

Für die Determinante bekommen wir dann:

$$\det B(t) = \det B(t_0) \cdot \det \left(I + B^{-1}(t_0)B'(t_0)(t - t_0) + \mathcal{O}((t - t_0)^2) \right).$$

Die Matrix $I + B^{-1}(t_0) \cdot B'(t_0) + \mathcal{O}((t - t_0)^2)$ hat auf der Diagonalen Einträge der Form $1 + (B^{-1}B')_{kk}(t - t_0) + \mathcal{O}((t - t_0)^2)$, und außerhalb der Diagonalen nur Einträge $\mathcal{O}(t - t_0)$. Wenn man beim Ausmultiplizieren der Determinante einen Nichtdiagonaleintrag wählt, dann muß man noch mindestens einen weiteren Nichtdiagonaleintrag wählen, und beide zusammen ergeben dann $\mathcal{O}((t - t_0)^2)$ (oder es ergibt sich eine noch höhere Potenz).

Und wenn man nur Einträge auf der Diagonalen nimmt, dann kann man $n - 1$ mal eine eins wählen und einmal einen Term $(B^{-1}B')_{kk}(t - t_0)$, alles weitere ergibt $\mathcal{O}((t - t_0)^2)$. Damit ist

$$\begin{aligned} \det \left(I + B^{-1}(t_0)B'(t_0)(t - t_0) + \mathcal{O}((t - t_0)^2) \right) \\ = 1 + \sum_k (B^{-1}(t_0)B'(t_0))_{kk}(t - t_0) + \mathcal{O}((t - t_0)^2). \end{aligned}$$

Damit entsteht

$$\det B(t) - \det B(t_0) = \det B(t_0) \cdot \sum_k (B^{-1}(t_0)B'(t_0))_{kk}(t - t_0) + \mathcal{O}((t - t_0)^2).$$

Nun dividiert man durch $t - t_0$ und schickt $t \rightarrow t_0$, was den Beweis vollendet.

Bei genauer Durchsicht fällt auf, daß die Aussage auch noch richtig ist, wenn B nur einmal stetig nach dem Parameter t differenzierbar ist (es sind diverse $\mathcal{O}((t - t_0)^2)$ zu ersetzen durch $\mathfrak{o}(t - t_0)$) \square

Satz 2.7. Sei $C: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit Glattheit C^1 , sei Φ zweimal stetig differenzierbar, und U sei einmal stetig differenzierbar.

Dann ist die Funktion $K = K(t) = \int_{\Omega_t} C(t, x) \, dx$ stetig differenzierbar, und es ist

$$\frac{d}{dt} K(t) = \int_{\Omega_t} C_t(t, x) \, dx + \int_{\Omega_t} \operatorname{div}(CU)(t, x) \, dx.$$

Beweis. Wir transformieren gemäß $x = \Phi(a, t, 0)$, dann ist

$$dx = (\det \partial_a \Phi(a, t, 0)) \, da =: J(a, t) \, da,$$

denn $\det \partial_a \Phi$ ist immer positiv, und deshalb sind die Betragsstriche überflüssig.

Die Strategie des Beweises ist: wir substituieren x zu a , differenzieren unter dem Integral nach t , und substituieren zügig wieder a zurück zu x . Zunächst ist

$$K(t) = \int_{\Omega_0} C(t, \Phi(a, t, 0)) \cdot J(a, t) \, da,$$

und somit auch

$$K'(t) = \int_{\Omega_0} \left(\frac{d}{dt} C(t, \Phi(a, t, 0)) \right) \cdot J(a, t) da + \int_{\Omega_0} C(t, \Phi(a, t, 0)) \cdot (\partial_t J(a, t)) da.$$

Gemäß der Umrechnung von Lagrange- auf Euler-Ableitungen ist

$$\frac{d}{dt} C(t, \Phi(a, t, 0)) = C_t(t, x) + (U(t, x) \cdot \nabla) C(t, x).$$

Weiterhin haben wir

$$\partial_t J(a, t) = J(a, t) \cdot \text{spur} \left((\partial_t \partial_a \Phi) \cdot (\partial_a \Phi)^{-1} \right).$$

Und schließlich ist, wenn man a als $a(x)$ auffaßt,

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j}(t, x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}(a(x), t, 0) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t \partial a_k} \cdot \frac{\partial a_k}{\partial x_j}.$$

Der Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion, angewandt auf $\Phi: \mapsto x$ liefert uns dann

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \left((\partial_t \partial_a \Phi) \cdot (\partial_a \Phi)^{-1} \right)_{ij},$$

und somit ist dann

$$\text{spur} \left((\partial_t \partial_a \Phi) \cdot (\partial_a \Phi)^{-1} \right) = \text{div} U(t, x),$$

also auch $\partial_t J(a, t) = J(a, t) \cdot \text{div} U(t, x)$. Insgesamt erhalten wir dann

$$K'(t) = \int_{\Omega_t} C_t(t, x) + (U(t, x) \cdot \nabla) C(t, x) dx + \int_{\Omega_t} C(t, x) \cdot \text{div} U(t, x) dx,$$

woraus die Behauptung durch Umsortieren folgt. □

2.3 Erhaltungsgleichungen für Massen und Impulse

Die Massendichte ist eine Funktion $\varrho = \varrho(t, x)$ mit Werten ≥ 0 . Wir betrachten

$$\int_{\Omega} \varrho(t, x) dx$$

als Masse des betrachteten Materials im Gebiet Ω zur Zeit t . In Lagrange-Koordinaten haben wir

$$\varrho(t, x) = \varrho(t, \Phi(a, t, 0)) =: \rho_{\text{Lagr}}(t, a).$$

Nun ist

$$\int_{\Omega_t} \varrho(t, x) dx = \int_{\Omega_0} \rho_{\text{Lagr}}(t, a) \cdot \det \partial_a \Phi(a, t, 0) da = \int_{\Omega_0} \rho_{\text{Lagr}}(t, a) \cdot J(a, t) da,$$

und wir verlangen per Axiom, daß dies nicht von der Zeit abhängt. Weil Ω_0 variabel ist, lautet die Massenerhaltung ausgedrückt in Lagrange-Koordinaten:

$$\partial_t \left(\rho_{\text{Lagr}}(t, a) J(a, t) \right) = 0, \quad \forall(t, a).$$

Und aus der Gleichung $\partial_t \int_{\Omega_t} \varrho(t, x) dx \stackrel{!}{=} 0$ ergibt sich dann

$$\int_{\Omega_t} \varrho_t(t, x) + \text{div}(\varrho U)(t, x) dx = 0,$$

was wegen der Wählbarkeit von Ω_t zu der *Kontinuitätsgleichung in Euler-Koordinaten* führt:

$$\varrho_t(t, x) + \operatorname{div}(\varrho(t, x)U(t, x)) = 0, \quad \forall(t, x). \quad (2.3)$$

Falls das Medium inkompressibel ist, dann ist $\varrho_t(t, x) \equiv 0$, und falls wir zusätzlich noch räumliche Homogenität voraussetzen, dann ist auch $\nabla\varrho \equiv 0$, und die Kontinuitätsgleichung wird dann zu

$$\operatorname{div} U(t, x) = 0.$$

Als nächstes betrachten wir Kräfte, die auf ein Gebiet wirken. Anschaulich gibt es zwei Sorten von Kräften:

- Kräfte, die direkt im Inneren des Mediums ansetzen (z.B. Gravitation),
- Kräfte, die auf der Oberfläche ansetzen (z.B. Schubkräfte).

Weiterhin ist zu erwarten, daß Kräfte beider Art sich irgendwie fortsetzen im Gebiet. Zum Beispiel spürt ein Teilchen im unteren Bereich eines elastischen Mediums die Gravitation direkt, und außerdem spürt es den Druck, den die weiter oben liegenden Schichten ausüben, die ihrerseits der Gravitation unterliegen.

Die beiden Krafttypen beschreiben wir durch

$$\int_{\Omega_t} f(t, x) \, dx, \quad f = \text{vektorielle Kraftdichte,}$$

bzw. durch ein Oberflächenintegral

$$\int_{\partial\Omega_t} \sigma \, d\vec{\Sigma}, \quad d\vec{\Sigma} = \text{vektorielles Oberflächenelement,} \quad \sigma = \text{Matrix.}$$

Wir werden später σ als den *Spannungstensor* bezeichnen, der den Normaleneinheitsvektor auf den Kraftvektor abbildet.

Weiterhin sei $d\Sigma$ das skalare Oberflächenelement. Ansonsten wollen wir nicht immer jeden Vektor durch einen Pfeil kennzeichnen.

Beide Integrale können wir zusammenfassen zu $\int_{\Omega_t} d\varphi_t(x)$, wobei $d\varphi_t(x)$ ein Maß ist, das Anteile enthalten darf, die nur auf dem Rand $\partial\Omega_t$ getragen sind. Wir haben also per Definition

$$\int_{\Omega_t} f(t, x) \, dx + \int_{\partial\Omega_t} \sigma \, d\vec{\Sigma} =: \int_{\Omega_t} d\varphi_t(x).$$

Nun kommt eine Annahme aus der Physik: wir setzen voraus, daß in Inertialsystemen (also insbesondere dem Laborkoordinatensystem) und für beliebige Gebiete Ω_t gilt, daß

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} U(t, x) \varrho(t, x) \, dx &= \int_{\Omega_t} d\varphi_t(x), \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} x \times U(t, x) \varrho(t, x) \, dx &= \int_{\Omega_t} x \times d\varphi_t(x) \quad (n = 3), \end{aligned}$$

was den bekannten Erhaltungssätzen für Impuls und Drehimpuls entspricht.

Wenn wir Satz 2.7, die Formel für die Beschleunigung in Eulerkoordinaten und die Kontinuitätsgleichung (2.3) benutzen, dann erhalten wir die nützlichen Darstellungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} U(t, x) \varrho(t, x) \, dx &= \int_{\Omega_t} \gamma(t, x) \varrho(t, x) \, dx \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} x \times U(t, x) \varrho(t, x) \, dx &= \int_{\Omega_t} x \times \gamma(t, x) \varrho(t, x) \, dx. \end{aligned}$$

Nun beschreiben wir genauer, was wir darunter verstehen, daß die Kräfte sich im Medium fortsetzen: Wir zerlegen das Medium S künstlich in zwei disjunkte Teile S_1 und S_2 , denen die Gebiete $\Omega_t^{(1)}$ und $\Omega_t^{(2)}$ entsprechen. Wir nehmen an, daß das (äußere) System S_2 auf das (innere) System eine Kraft wirken läßt, die nur über die Oberfläche $\Sigma = \partial\Omega_t^{(1)} \cap \partial\Omega_t^{(2)}$ vermittelt wird und durch das Maß $d\varphi_t(x)$ beschrieben wird, und zwar soll sein:

$$d\varphi_t = \sigma d\vec{\Sigma},$$

mit einem Spannungstensor σ . Dieser hängt von t und x ab, und diese Abhängigkeit sei C^1 .

Satz 2.8. Für die Beschleunigung $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^\top$ ist

$$\varrho\gamma_i = f_i + \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} \sigma_{ij}, \quad i = 1, \dots, n,$$

wenn f der Vektor der externen Kräfte ist.

Beweis. Der Impulserhaltungssatz angewandt auf das innere Gebiet $\Omega_t^{(1)}$ liefert (mit $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ als Außeneinheitsnormalenvektor von $\Omega_t^{(1)}$):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t^{(1)}} \varrho(t, x) \gamma_i(t, x) dx &= \int_{\Omega_t^{(1)}} f_i(t, x) dx + \int_{\partial\Omega_t^{(1)}} \left(\sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \nu_j \right) d\Sigma \\ &= \int_{\Omega_t^{(1)}} (f_i(t, x) + \operatorname{div} \sigma_{i\cdot}(t, x)) dx, \end{aligned}$$

und nun brauchen wir nur noch $\Omega_t^{(1)}$ variieren. □

Wir erinnern daran, daß die Beschleunigung in Euler-Koordinaten dargestellt wird durch

$$\gamma_i = \partial_t U_i + \sum_{j=1}^n U_j \partial_j U_i,$$

und es folgt der *Impulserhaltungssatz in Euler-Koordinaten*:

$$\varrho \left(\partial_t U_i + \sum_{j=1}^n U_j \partial_j U_i \right) = \sum_{j=1}^n \partial_j \sigma_{ij} + f_i.$$

Das wollen wir noch etwas umformen. Für eine symmetrische Matrix A sei $\operatorname{div} A$ ein Vektor, der definiert wird durch $(\operatorname{div} A)_i = \sum_{j=1}^n \partial_j A_{ij}$. Wenn weiterhin u und v Vektoren sind, dann sei $u \otimes v$ die Matrix mit den Einträgen $u_i v_j$. Nach dieser Notationseinführung wollen wir $\partial_t(\varrho U) + \operatorname{div}(\varrho U \otimes U)$ bestimmen. Und zwar ist

$$\begin{aligned} (\partial_t(\varrho U) + \operatorname{div}(\varrho U \otimes U))_i &= \partial_t(\varrho U_i) + \sum_j \partial_j(\varrho U_j U_i) \\ &= (\partial_t \varrho) U_i + \varrho \partial_t U_i + U_i \sum_j \partial_j(\varrho U_j) + \varrho \sum_j U_j \partial_j U_i \\ &= U_i \left(\partial_t \varrho + \sum_j \partial_j(\varrho U_j) \right) + \varrho \left(\partial_t U_i + \sum_j U_j \partial_j U_i \right), \end{aligned}$$

und wegen der Kontinuitätsgleichung ist dies gleich der linken Seite des Impulserhaltungssatzes. Damit haben wir also die beinahe endgültige Form des Impulserhaltungssatzes:

$$\partial_t(\varrho U) + \operatorname{div}(\varrho U \otimes U) = \left(\sum_{j=1}^n \partial_j \sigma_{ij} \right)_{i=1, \dots, n} + f.$$

Satz 2.9. *Der Spannungstensor σ ist symmetrisch.*

Beweis. Wir führen den Beweis nur im Falle $n = 3$. Wenn wir das Drehimpulserhaltungsaxiom umsortieren, dann haben wir

$$\int_{\Omega_t} x \times (\gamma \varrho - f) \, dx = \int_{\partial\Omega_t} x \times (\sigma \nu) \, d\Sigma.$$

Wir nehmen von dieser Vektorgleichung die erste Komponente und setzen die obige Formel für die Beschleunigung ein:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} x_2 \left(\sum_{j=1}^3 \partial_j \sigma_{3j} \right) - x_3 \left(\sum_{j=1}^3 \partial_j \sigma_{2j} \right) \, dx &= \int_{\partial\Omega_t} x_2 (\sigma \nu)_3 - x_3 (\sigma \nu)_2 \, d\Sigma \\ &= \sum_{j=1}^3 \int_{\partial\Omega_t} (x_2 \sigma_{3j} - x_3 \sigma_{2j}) \nu_j \, d\Sigma = \int_{\Omega_t} \sum_{j=1}^3 \partial_j (x_2 \sigma_{3j} - x_3 \sigma_{2j}) \, dx \\ &= \int_{\Omega_t} \sum_{j=1}^3 (\delta_{2j} \sigma_{3j} + x_2 \partial_j \sigma_{3j} - \delta_{3j} \sigma_{2j} - x_3 \partial_j \sigma_{2j}) \, dx. \end{aligned}$$

Wir vergleichen linke und rechte Seite und entdecken, daß also gilt:

$$0 = \int_{\Omega_t} (\sigma_{32} - \sigma_{23}) \, dx.$$

Weil Ω_t variabel ist, folgt $\sigma_{32} \equiv \sigma_{23}$. □

Eine nützliche Konsequenz ist, daß der Spannungstensor 3 Eigenvektoren hat, die paarweise aufeinander senkrecht stehen.

Die endgültige Form des *Impulserhaltungssatzes in Eulerkoordinaten* ist damit

$$\partial_t(\varrho U) + \operatorname{div}(\varrho U \otimes U - \sigma) = f. \tag{2.4}$$

Im dreidimensionalen Fall haben die gesuchten Funktionen ϱ , U und σ insgesamt $1 + 3 + 6 = 10$ Komponenten, andererseits bestehen die Differentialgleichungen (2.3) und (2.4) nur aus $1 + 3 = 4$ Gleichungen. Die fehlenden 6 Gleichungen kommen aus Materialgesetzen, die Beziehungen herstellen zwischen Verformung und Spannung. Insbesondere definieren wir den *Verformungsratentensor* mit den Einträgen

$$\varepsilon_{ij}(U) = \frac{1}{2} (\partial_j U_i + \partial_i U_j),$$

was genau dem symmetrischen Anteil der Jacobi-Matrix ∇U entspricht.

Definition 2.10. *Ein Medium heißt Fluid wenn $\sigma = f(\varepsilon)$ für eine geeignete Funktion f .*

Insbesondere wird damit ausgeschlossen, daß σ vom antisymmetrischen Anteil von ∇U abhängt, oder von höheren Ableitungen von U oder anderen Dingen.

Als Beispiel betrachten wir ein *Newtonsches viskoses Fluid*: in diesem Fall ist die Beziehung zwischen σ und ε affin linear, und es gilt

$$\sigma_{ij} = \mu(\partial_j U_i + \partial_i U_j) + c\delta_{ij},$$

und aus physikalischen Erwägungen heraus ist $c = \lambda \operatorname{div} U - p$, wobei p der Druck ist. Wiederum physikalische Betrachtungen führen zu den Einschränkungen $\mu \geq 0$ und $2\mu + 3\lambda \geq 0$. Wir bekommen dann insgesamt das System

$$\partial_t(\varrho U) + \operatorname{div}(\varrho U \otimes U) = f + \mu \Delta U + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} U - \nabla p.$$

Wenn das Fluid homogen und inkompressibel ist, dann ist $\varrho \equiv \varrho_0$, und wir erhalten die *inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen*:

$$\begin{cases} \varrho_0 (\partial_t U + (U \cdot \nabla)U) = f + \mu \Delta U - \nabla p, \\ \operatorname{div} U = 0. \end{cases}$$

Ein *perfektes Fluid* wird beschrieben durch $\mu = \lambda = 0$, und es ist dann $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$. Die Zustandsgleichung hat dann oft die Gestalt $p = p(\varrho)$. Vgl. z.B. die Zustandsgleichung des idealen Gases: $pV = NRT$ mit N als Teilchenzahl und V als Volumen, also $p = RT \cdot \frac{N}{V}$ und $\frac{N}{V} = \varrho$.

Bei *Nicht-Newtonischen Fluiden* hängt σ auf nichtlineare Weise von ε ab, und Beispiele dafür sind z.B. Honig, zähe Motoröle oder Ketchup.

2.4 Erhaltungsgleichungen für die Energie

Wir beginnen mit der *kinetischen Energie*, welche die Energiedichte $\frac{1}{2}\varrho|U|^2$ hat. Dann ist mit den üblichen Rechenregeln

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{\Omega_t} \frac{1}{2}\varrho|U|^2 dx &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \partial_t (\varrho|U|^2) + \operatorname{div} (\varrho|U|^2 U) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} (\partial_t \varrho)|U|^2 + \varrho \partial_t |U|^2 + (\operatorname{div}(\varrho U))|U|^2 + \varrho U \cdot \nabla |U|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} (0 + 2\varrho U \cdot \partial_t U + \varrho U \cdot \nabla |U|^2) dx. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \varrho U \cdot \nabla |U|^2 &= \varrho \sum_j U_j \partial_j |U|^2 = 2\varrho \sum_{i,j} U_j U_i \partial_j U_i = 2\varrho \sum_i U_i \sum_j U_j \partial_j U_i \\ &= 2(\varrho U) \cdot (U \cdot \nabla)U, \end{aligned}$$

und somit ergibt sich als Ableitung der kinetischen Energie im Gebiet Ω_t

$$\partial_t \int_{\Omega_t} \frac{1}{2}\varrho|U|^2 dx = \int_{\Omega_t} \varrho(t, x) \gamma(t, x) \cdot U(t, x) dx = \int_{\Omega_t} (f + \operatorname{div} \sigma) \cdot U dx.$$

Wir nehmen an, daß es eine Funktion $e = e(t, x)$ gibt, die die *innere Energie* pro Masse beschreibt, sodaß dann $\varrho e = (\varrho e)(t, x)$ die innere Energie pro Volumen angibt. Dann ist

$$E = \int_{\Omega_t} \varrho(t, x) e(t, x) dx$$

die innere Energie zur Zeit t im Gebiet Ω_t . Die Gesamtenergie wird schließlich gegeben durch

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega_t} \varrho \left(e + \frac{1}{2}|U|^2 \right) dx.$$

Als nächstes brauchen wir den Begriff der *Leistung*. Für eine Punktmasse m ist die von den externen Kräften F an dieser Punktmasse erbrachte Leistung P_{ext} gleich der Zuwachsrate der Energie, also

$$F = ma = m\dot{v} \implies P_{\text{ext}} = \partial_t \left(\frac{m}{2} v^2 \right) = m v \cdot \dot{v} = F \cdot v.$$

Analog setzen wir für ein Fluid

$$P_{\text{ext}} = \int_{\Omega_t} f \cdot U dx + \int_{\partial\Omega_t} U \cdot \sigma d\vec{\Sigma},$$

und das zweite Integral ist gleich

$$\int_{\partial\Omega_t} \sum_{i,j} U_i \sigma_{ij} \nu_j \, d\Sigma = \sum_i \int_{\Omega_t} \partial_j (U_i \sigma_{ij}) \, dx = \int_{\Omega_t} \operatorname{div}(\sigma U) \, dx,$$

denn $\sigma = \sigma^\top$.

Schließlich benötigen wir das Konzept der *Wärmebilanz*. Es bezeichne $Q_S(t)$ die Wärmemenge, die das System S im Zeitintervall $[0, t]$ erhalten hat. Diese Wärme kann auf zwei Wegen in das System eindringen: direkt im Innern des Gebiets Ω_t (also z.B. über Wärmestrahlung oder durch chemische Reaktionen), oder als Wärmestrom über die Oberfläche. Dementsprechend können wir schreiben

$$\dot{Q}_S(t) = \int_{\Omega_t} r(t, x) \, dx - \int_{\partial\Omega_t} q \cdot d\vec{\Sigma},$$

wobei r die Dichte der in Ω_t erzeugten Wärme beschreibt, und q der Wärmestromvektor ist. Dann ist auf üblichem Wege

$$\dot{Q}_S(t) = \int_{\Omega_t} r - \operatorname{div} q \, dx.$$

Als ein physikalisches Axiom haben wir jetzt, daß die Gesamtenergiebilanz beschrieben wird durch

$$\partial_t \mathcal{E} = P_{\text{ext}} + \dot{Q}_S,$$

was zusammengebaut ergibt, daß

$$\partial_t \int_{\Omega_t} \varrho \left(e + \frac{1}{2} |U|^2 \right) \, dx = \int_{\Omega_t} (f \cdot U + \operatorname{div}(\sigma U) + r - \operatorname{div} q) \, dx,$$

also auch

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{\Omega_t} \varrho e \, dx &= \int_{\Omega_t} (\operatorname{div}(\sigma U) - (\operatorname{div} \sigma) \cdot U + r - \operatorname{div} q) \, dx, \\ \partial_t(\varrho e) + \operatorname{div}(\varrho e U) &= \operatorname{div}(\sigma U) - (\operatorname{div} \sigma) \cdot U + r - \operatorname{div} q, \end{aligned}$$

was sich umformt zu

$$\partial_t(\varrho e) + \operatorname{div}(\varrho e U) = \sum_{i,j} \sigma_{ij} \partial_i U_j + r - \operatorname{div} q.$$

Die linke Seite können wir auch schreiben wie folgt:

$$\partial_t(\varrho e) + \operatorname{div}(\varrho e U) = \varrho \left(\partial_t e + (U \cdot \nabla) e \right),$$

und die Klammer ist gerade der totalen Zeitableitung, sodaß folgt

$$\frac{De}{dt} = \frac{1}{\varrho} \sum_{i,j} \sigma_{ij} \partial_j U_i + \frac{1}{\varrho} (r - \operatorname{div} q).$$

Links steht die Änderung der spezifischen inneren Energie, und rechts die *spezifische innere Leistung* und der spezifische Wärmeaustausch.

Die Gleichung der *Energieerhaltung* ist dann in Eulerkoordinaten

$$\partial_t \left(\varrho \left(e + \frac{1}{2} |U|^2 \right) \right) + \operatorname{div} \left(\varrho U \left(e + \frac{1}{2} |U|^2 \right) - \sigma U + q \right) = f \cdot U + r. \quad (2.5)$$

2.5 Zusammenfassung

Wenn es keine äußeren Einflüsse und keinen Wärmestrom gibt, dann lauten die Erhaltungsgleichung für Masse, Impuls, Energie bei einem Fluid in Eulerkoordinaten wie folgt:

$$\begin{aligned}\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho U) &= 0, \\ \partial_t(\varrho U) + \operatorname{div}(\varrho U \otimes U - \sigma) &= 0, \\ \partial_t \left(\varrho \left(e + \frac{1}{2}|U|^2 \right) \right) + \operatorname{div} \left(\varrho U \left(e + \frac{1}{2}|U|^2 \right) - \sigma U \right) &= 0.\end{aligned}$$

Es gibt noch weitere Zustandsgleichungen, die Zusammenhänge zwischen ϱ , U , σ und e herstellen.

Im Falle eines perfekten Fluids ist $\sigma = -pI$ mit dem Druck p , und für $x \in \mathbb{R}^1$ bekommen wir dann

$$\begin{aligned}\partial_t \varrho + \partial_x(\varrho U) &= 0, \\ \partial_t(\varrho U) + \partial_x(\varrho U^2 + p) &= 0, \\ \partial_t \left(\varrho \left(e + \frac{1}{2}U^2 \right) \right) + \partial_x \left(\varrho U \left(\frac{1}{2}U^2 + i \right) \right) &= 0.\end{aligned}$$

Hierbei ist $i = e + \frac{p}{\varrho}$ die *spezifische Enthalpie*, und die Zustandsgleichung hat die Form $e = e(s, v)$, mit s als *spezifischer Entropie* und $v = \frac{1}{\varrho}$ als *spezifischem Volumen*. Dann ist $p = -\frac{\partial e}{\partial v}$.

Es ist nützlich, noch Gleichungen zu haben für die Zeitableitungen von ϱ , U und e allein:

$$\partial_t \varrho + \partial_x(\varrho U) = 0, \tag{2.6}$$

$$\partial_t U + UU_x + \frac{1}{\varrho} p_x = 0, \tag{2.7}$$

$$\partial_t e + Ue_x + \frac{p}{\varrho} U_x = 0. \tag{2.8}$$

Schließlich noch eine Gleichung für die spezifische Entropie s . Wir haben

$$e = e(s, v), \quad v = \frac{1}{\varrho}, \quad p = -\frac{\partial e}{\partial v},$$

womit wir dann bekommen, daß

$$\begin{aligned}e_t &= e_s s_t + e_v v_t = e_s s_t - p v_t = e_s s_t + \frac{p}{\varrho^2} \varrho_t = e_s s_t - \frac{p}{\varrho^2} (\varrho U)_x \\ &= e_s s_t - \frac{p}{\varrho^2} \varrho_x U - \frac{p}{\varrho} U_x, \\ e_x &= e_s s_x + e_v v_x = e_s s_x + \frac{p}{\varrho^2} \varrho_x.\end{aligned}$$

Eingesetzt in (2.8) erhalten wir demnach

$$e s_t + U e_s s_x = 0,$$

was sich vereinfacht zu

$$\partial_t s + U s_x = 0. \tag{2.9}$$

Das ist aber gerade die totale Zeitableitung, also

$$\frac{Ds}{dt} = 0.$$

Kapitel 3

Schockwellen

Dieses Kapitel orientiert sich an [3].

3.1 Charakteristiken

Wiederholung: sei $a = \text{const.}$ und $u \in C^1$ sei Lösung zu

$$u_t(t, x) + au_x(t, x) = f(t, x).$$

Für ein festes $x_0 \in \mathbb{R}$ setzen wir $v(t) = u(t, x_0 + at)$ und finden dann $v'(t) = f(t, x_0 + at)$, was etwas bekanntes ist.

Nun betrachten wir Burgers' Gleichung:

$$u_t(t, x) + u(t, x)u_x(t, x) = 0, \quad u(0, x) = u_0(x).$$

Wir wählen wie bisher ein $x_0 \in \mathbb{R}$, setzen voraus, daß $u \in C^1$ eine Lösung ist, und probieren mit $v = v(t) = u(t, x_0 + u_0(x_0)t)$. Dann erhalten wir nach Einsetzen der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} v'(t) &= u_t(t, x_0 + u_0(x_0)t) + u_x(t, x_0 + u_0(x_0)t) \cdot u_0(x_0) \\ &= u_x(t, x_0 + u_0(x_0)t) \left(u_0(x_0) - u(t, x_0 + u_0(x_0)t) \right) \\ &= -v(t) \cdot u_x(t, x_0 + u_0(x_0)t) + u_x(t, x_0 + u_0(x_0)t) \cdot v(0). \end{aligned}$$

Wir setzen als Abkürzung $\alpha(t) = u_x(t, x_0 + u_0(x_0)t)$, haben dann $v'(t) = -\alpha(t)v(t) + \alpha(t)v(0)$, wofür wir die klassische Lösungsformel zitieren:

$$\begin{aligned} v(t) &= \exp\left(-\int_{s=0}^t \alpha(s) ds\right) v(0) + \int_{s=0}^t \exp\left(-\int_{r=s}^t \alpha(r) dr\right) \alpha(s)v(0) ds \\ &= \exp\left(-\int_{s=0}^t \alpha(s) ds\right) v(0) + \int_{s=0}^t \frac{d}{ds} \exp\left(-\int_{r=s}^t \alpha(r) dr\right) ds \cdot v(0) \\ &= v(0), \end{aligned}$$

woraus wir erhalten, daß $u(t, x_0 + u_0(x_0)t) = u_0(x_0)$. Also gibt es im $x - t$ -Diagramm eine Gerade, die in $(x_0, 0)$ startet und den Anstieg $1/u_0(x_0)$ hat, entlang der die Funktion u konstant ist. Durch Betrachtung genügend vieler solcher Geraden (die genügend dicht liegen sollten) kann man dann die Lösung u geometrisch näherungsweise bestimmen, bzw. ihre Eindeutigkeit zeigen.

Definition 3.1. Sei $u \in C^1$ eine Lösung von $u_t + a(u)u_x = 0$ für $0 \leq t \leq t_0$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann heißen die Funktionen $\gamma = \gamma(t; x_0)$ mit dem Parameter $x_0 \in \mathbb{R}$ Charakteristiken, falls

$$\begin{cases} \gamma'(t) = a(u(t, \gamma(t))), & 0 \leq t \leq t_0, \\ \gamma(0) = x_0. \end{cases}$$

Als Beispiel sei $a = \text{const.}$, dann ist $\gamma(t) = x_0 + at$ wie zu Beginn.

Satz 3.2. Sei $v = v(t) = u(t, \gamma(t))$ und γ eine Charakteristik zu u . Dann ist $v'(t) = 0$ für $0 \leq t \leq t_0$.

Beweis. Wir haben $v'(t) = u_t(t, \gamma(t)) + u_x(t, \gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$. □

Analog sei u jetzt eine Lösung zur inhomogenen Gleichung $u_t + a(u)u_x = f(t, x)$. Dann definieren wir die Charakteristik γ wieder als Lösung der Differentialgleichung $\gamma'(t) = a(u(t, \gamma(t)))$ mit dem Anfangswert $\gamma(0) = x_0$, und für $v(t) = u(t, \gamma(t))$ folgt dann $v'(t) = g(t, \gamma(t))$.

Insgesamt bekommen wir dann das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{cases} v'(t) = g(t, \gamma(t)), & v(0) = u_0(x_0), \\ \gamma'(t) = a(v(t)), & \gamma(0) = x_0, \end{cases}$$

welches nach dem Satz von Picard–Lindelof für kleine Zeiten eindeutig lösbar ist.

Wenn es keine rechte Seite g gibt, dann ist also $v' \equiv 0$, also u konstant entlang der Charakteristiken, und die Bestimmungsgleichung der Charakteristik γ vereinfacht sich von $\gamma'(t) = a(u(t, \gamma(t)))$ zu $\gamma'(t) = a(u_0(x_0)) = a(u_0(x_0))$, und dann ist

$$\gamma(t) = x_0 + a(u_0(x_0))t,$$

also sind die Charakteristiken dann gerade Linien im $x - t$ -Diagramm.

3.2 Gradientenkatastrophen

Nun betrachten wir wieder die Burgers-Gleichung, also $a(u) = u$. Seien zwei Punkte $x_1 < x_2$ gegeben mit $u_0(x_1) > u_0(x_2) > 0$, dann stellt man fest, daß die von $(x_1, 0)$ und $(x_2, 0)$ ausgehenden Charakteristiken sich zu einer positiven Zeit schneiden. Dort hätte u dann zwei verschiedene Werte, also kann spätestens zu diesem Zeitpunkt u nicht mehr eine stetig differenzierbare Lösung sein.

Wenn aber $u_0(x_1) < u_0(x_2)$, dann schneiden sich die beiden Charakteristiken zu positiver Zeit nicht.

Wir bestimmen, wie lange es zu dieser Situation dauert: die beiden Charakteristiken sollen sich schneiden zur Zeit T an der Stelle x^* . Dann ist

$$x^* = x_1 + u_0(x_1)T = x_2 + u_0(x_2)T,$$

also auch

$$T = -\frac{x_2 - x_1}{u_0(x_2) - u_0(x_1)} = -\frac{1}{u_0'(\xi)},$$

nach Mittelwertsatz der Differentialrechnung für ein ξ zwischen x_1 und x_2 . Insgesamt haben wir dann: für $0 \leq t \leq t_0$ mit

$$t_0 < \inf_{\xi \in \mathbb{R}} \max \left\{ -\frac{1}{u_0'(\xi)}, 0 \right\}$$

können sich verschiedene Charakteristiken nicht schneiden.

Geometrisch ist glaubhaft, daß zum Zeitpunkt des frühesten Schneidens verschiedener Charakteristiken die Lösung u einen unbeschränkten Anstieg in x -Richtung hat, was die Bezeichnung *Gradientenkatastrophe* erklärt.

Nun zeigen wir, daß die obige Schranke für t_0 tatsächlich scharf ist, und zwar im allgemeinen Fall $a = a(u)$. Wir haben also $u_t + a(u)u_x = 0$ für $0 \leq t \leq t_0$ und $x \in \mathbb{R}$. Sei t fixiert, und $x \in \mathbb{R}$ sei variabel. Dann liegt (t, x) auf einer Charakteristik, und für diese gilt $x = x_0 + a(u_0(x_0))t$. Dies stellt eine Funktion $x = x(x_0)$ dar, deren Ableitung nahe bei 1 liegt, wenn t klein ist. Hierbei setzen wir voraus, daß

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |u_0(\xi)| + \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |u_0'(\xi)| < \infty$$

und $a \in C^1(\mathbb{R})$. Also können wir die Funktion $x = x(x_0)$ invertieren für kleine t , und erhalten dann $x_0 = x_0(x)$. Dann ist (immer noch für festes t) $u(t, x) = u_0(x_0(x))$.

Für die Ortsableitung von u haben wir dann

$$u_x(t, x) = u'_0(x_0(x)) \cdot \frac{dx_0}{dx}.$$

Die gesuchte Gradientenkatastrophe liegt vor, wenn $|u_x(t, x)| = \infty$. Weil u'_0 als beschränkt vorausgesetzt wurde, muß dann $\frac{dx_0}{dx}$ unendlich werden. Jetzt haben wir

$$x = x_0(x) + a(u_0(x_0(x))) \cdot t,$$

und wenn wir hier nach x differenzieren, folgt

$$1 = \frac{dx_0}{dx} + \left(\frac{d}{dx} a(u_0(x_0)) \right) \cdot t \cdot \frac{dx_0}{dx} = \frac{dx_0}{dx} \left(1 + t \frac{d}{dx_0} a(u_0(x_0)) \right),$$

und hier muß die letzte große Klammer gleich Null werden, also folgt als Lebensdauer der Lösung u :

$$t_{\max} = \frac{1}{-\min_{x_0 \in \mathbb{R}} \min \left\{ \frac{d}{dx_0} a(u_0(x_0)), 0 \right\}}.$$

3.3 Schwache Lösungen

Definition 3.3. Eine Funktion $u = u(t, x)$, die einmal stetig differenzierbar ist bzgl. (t, x) und die das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.1)$$

löst, heißt klassische Lösung.

Nach den bisherigen Erkenntnissen können wir nicht erwarten, daß eine Lösung sowohl C^1 -Regularität hat als auch für alle Zeiten existiert.

Als Versuch eines Auswegs betrachten wir schwache Lösungen. Dazu sei $\varphi = \varphi(t, x)$ eine glatte Funktion mit kompaktem Träger. Wir multiplizieren die Differentialgleichung $u_t + \partial_x f(u) = 0$ mit φ und integrieren über Ort und Zeit:

$$\int_{t=0}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} (u_t + \partial_x f(u)) \varphi(t, x) \, dx \, dt = 0.$$

Nach partieller Integration bekommen wir dann

$$\int_{t=0}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} (u \varphi_t + f(u) \varphi_x)(t, x) \, dx \, dt + \int_{x=-\infty}^{\infty} u_0(x) \varphi(0, x) \, dx = 0, \quad (3.2)$$

wobei u_0 wie üblich die Anfangswerte von u zur Zeit 0 sein sollen. Die Integrationen erfolgen in Wirklichkeit nur über beschränkten Gebieten, wegen des kompakten Trägers von φ . Der Vorteil ist, daß jetzt keinerlei Ableitungen auf u wirken.

Definition 3.4. Eine integrierbare Funktion $u = u(t, x)$ heißt schwache Lösung des Anfangswertproblems (3.1), wenn für alle glatten Funktionen $\varphi = \varphi(t, x)$ mit kompaktem Träger die Identität (3.2) gilt.

Satz 3.5. Jede klassische Lösung u ist auch schwache Lösung. Eine schwache Lösung, die C^1 -Regularität besitzt, ist auch klassische Lösung.

Beweis. Den ersten Teil haben wir schon bewiesen. Und für den zweiten Teil vermerken wir, daß wir im Falle $u \in C^1$ die partiellen Integrationen rückgängig machen können. \square

Mit kleinem Aufwand können wir den ersten Teil verallgemeinern. Dazu eine Sprachregelung:

Definition 3.6. Eine Funktion $u = u(t, x)$ auf \mathbb{R}^2 heißt stückweise stetig differenzierbar, aber stetig, wenn sie stetig auf dem \mathbb{R}^2 ist, und wenn es endlich viele Ausnahmekurven $\Gamma_1, \dots, \Gamma_K$ gibt mit glatten Parametrisierungen $x = x_1(t), \dots, x = x_K(t)$, wobei $x_1(t) < x_2(t) < \dots < x_K(t)$ für alle t , sodaß folgendes gilt:

- zwischen den Kurven sowie „links von Γ_1 “ und „rechts von Γ_K “ ist u stetig differenzierbar,
- die Ableitungen u_t und u_x haben einseitige endliche Grenzwerte auf den Kurven Γ_j .

Die Ableitungen u_x und u_t betrachten wir als undefiniert auf Γ_j .

Den Begriff „stückweise stetig differenzierbar, aber nicht (unbedingt) stetig“ definieren wir analog.

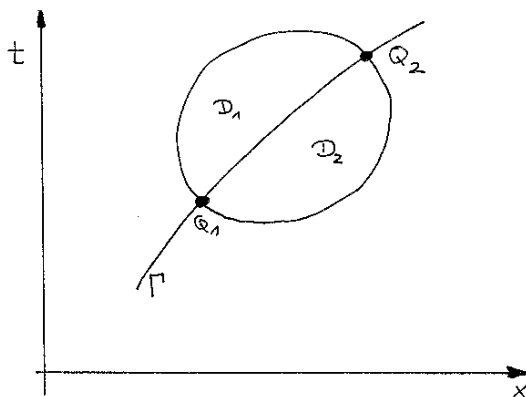
Dann stellen wir fest, daß für solche Funktionen u die üblichen partiellen Integrationen immer noch möglich sind, wenn φ eine glatte Funktion ist mit kompaktem Träger in \mathbb{R}^2 :

$$\int_{t=0}^{\infty} \int_{x \in \mathbb{R}} u_x(t, x) \varphi(t, x) dx dt = - \int_{t=0}^{\infty} \int_{x \in \mathbb{R}} u(t, x) \varphi_x(t, x) dx dt,$$

$$\int_{t=0}^{\infty} \int_{x \in \mathbb{R}} u_t(t, x) \varphi(t, x) dx dt = - \int_{x \in \mathbb{R}} u(0, x) \varphi(0, x) dx - \int_{t=0}^{\infty} \int_{x \in \mathbb{R}} u(t, x) \varphi_t(t, x) dx dt.$$

Folgerung 3.7. Sei u eine stückweise stetig differenzierbare, aber stetige Funktion, und abgesehen von den Ausnahmekurven $\Gamma_1, \dots, \Gamma_K$ sei u eine klassische Lösung von $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ mit Anfangswerten u_0 . Dann ist u auch eine schwache Lösung.

Eine häufige Situation ist, daß eine schwache Lösung u eine Sprung-Unstetigkeit entlang einer Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$ hat, und beiderseits von Γ eine stetig differenzierbare Funktion ist, mit einseitigen Grenzwerten auf Γ . Im Folgenden untersuchen wir, wie eine solche Kurve Γ verlaufen kann. Lokal sei Γ gegeben durch eine Parametrisierung $x = x(t)$. Wir wählen eine Testfunktion φ mit Träger in einem kleinen Kreis D , der durch Γ zerschnitten wird in D_1 und D_2 , siehe Skizze. Dann haben wir



$$0 = \iint_D (u \varphi_t + f(u) \varphi_x) dx dt = \iint_{D_1} (u \varphi_t + f(u) \varphi_x) dx dt + \iint_{D_2} (u \varphi_t + f(u) \varphi_x) dx dt.$$

Aber innerhalb D_1 und D_2 ist $u_t + \partial_x f(u) = 0$ mit Ableitungen im klassischen Sinn, und deshalb können wir schreiben

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{D_1} (u \varphi_t + f(u) \varphi_x) dx dt + \iint_{D_2} (u \varphi_t + f(u) \varphi_x) dx dt \\ &= \oint_{\partial D_1} -u \varphi dx + f(u) \varphi dt + \oint_{\partial D_2} -u \varphi dx + f(u) \varphi dt, \end{aligned}$$

wegen des Integralsatzes von Gauß. Nun ist aber $\varphi = 0$ auf der Kreislinie ∂D , also liefert nur Γ einen Beitrag zu den beiden Kurvenintegralen. Die Schnittpunkte von Γ mit ∂D seien Q_1 und Q_2 , und das Kurvenintegral entlang Γ von Q_1 bis Q_2 schreiben wir als $\int_{Q_1}^{Q_2}$. Seien weiterhin

$$\begin{aligned} u_l(t, x) &= u(t, x(t-0)), & (x, t) \in \Gamma, \\ u_r(t, x) &= u(t, x(t+0)), & (x, t) \in \Gamma, \end{aligned}$$

die Grenzwerte von u bei Annäherung an Γ von links (also innerhalb D_1) und bei Annäherung an Γ von rechts (innerhalb D_2). Dann folgt

$$0 = \int_{Q_1}^{Q_2} \left(-u_l \varphi dx + f(u_l) \varphi dt \right) - \int_{Q_1}^{Q_2} \left(-u_r \varphi dx + f(u_r) \varphi dt \right).$$

Wir schreiben $[u] := u_l - u_r$ sowie $[f(u)] := f(u_l) - f(u_r)$ für die Sprunghöhen von u und f beim Überschreiten von Γ , und es folgt

$$0 = \int_{Q_1}^{Q_2} \varphi \cdot \left(-[u] dx + [f(u)] dt \right).$$

Wir parametrisieren mittels $x = x(t)$, und dann sei $Q_1 \cong t_1$ sowie $Q_2 \cong t_2$, und es folgt

$$0 = \int_{t=t_1}^{t_2} \varphi(t, x(t)) \left(-[u](t, x(t)) \cdot \dot{x}(t) + [f(u)](t, x(t)) \right) dt.$$

Allerdings ist φ beliebig wählbar (solange der Träger innerhalb D verbleibt), und somit ist

$$\frac{dx}{dt} = \frac{[f(u)]}{[u]}$$

für die Parametrisierung $x = x(t)$ der Kurve Γ eine notwendige Bedingung.

Satz 3.8. *Sei u eine schwache Lösung von $u_t + \partial_x f(u) = 0$ mit einer Sprungunstetigkeit. Dann beträgt die Ausbreitungsgeschwindigkeit $s = \frac{dx}{dt}$ dieser Sprungunstetigkeit*

$$s = \frac{[f(u)]}{[u]},$$

wobei $[g]$ die Sprunghöhe einer Funktion g beim Übertreten der Unstetigkeitskurve Γ darstellt.

Diese Einschränkung an s ist bekannt als *Rankine–Hugoniot–Sprungbedingung*.

Die eben durchgeführten Rechnungen können wir auch in umgekehrter Richtung durchlaufen, und dann folgt:

Satz 3.9. *Sei u eine stückweise stetig differenzierbare Funktion mit Sprungunstetigkeiten entlang der Ausnahmekurven $\Gamma_1, \dots, \Gamma_K$. Außerhalb dieser Kurven sei u eine klassische Lösung zu (3.1), und entlang der Kurven sei jeweils die Rankine–Hugoniot–Sprungbedingung erfüllt. Dann ist u eine klassische Lösung von (3.1).*

Beispiel 3.10. *Wir betrachten die Burgers–Gleichung mit*

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : x \leq 0 \\ 1-x & : 0 < x < 1 \\ 0 & : 1 \leq x. \end{cases}$$

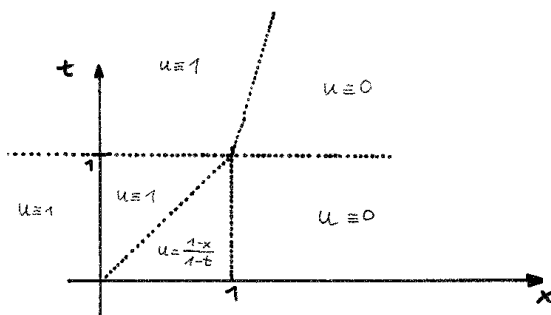
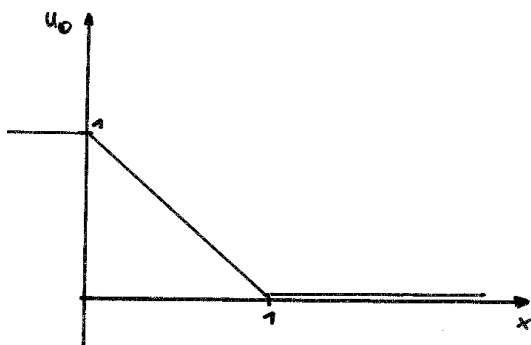
Dann wird für $0 \leq t < 1$ eine (bis auf zwei Knicke) klassische Lösung gegeben durch

$$u(t, x) = \begin{cases} 1 & : x < t, \\ \frac{1-x}{1-t} & : t \leq x \leq 1, \\ 0 & : x > 0, \end{cases}$$

wie man mit der Charakteristikenmethode schnell ermittelt. Und für $t \geq 1$ findet man eine schwache Lösung wie in der Skizze gegeben, mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schocks als

$$s = \frac{\frac{1}{2}(u_l^2 - u_r^2)}{u_l - u_r} = \frac{1}{2}(u_l + u_r),$$

was im vorliegenden Fall $s = 1/2$ ergibt.



Wir fassen unseren Kenntnisstand in Bezug auf (3.1) zusammen.

- Wenn $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ mit $\sup_{x \in \mathbb{R}} (|u_0(x)| + |u_0'(x)|) < \infty$, dann existiert eine klassische Lösung für ein gewisses Zeitintervall, aber im Allgemeinen nicht für immer. Klassische Lösungen sind eindeutig.
- Diese klassische Lösung ist auf dem genannten Zeitintervall eine schwache Lösung.
- Es ist unklar, ob es für jedes f und jede Anfangsfunktion u_0 eine global existierende schwache Lösung gibt.
- Es ist unklar, ob diese schwachen Lösungen eindeutig sind.

Um mit der letzten Frage anzufangen, schauen wir uns ein Anfangswertproblem an, das zwei schwache Lösungen hat.

Beispiel 3.11. Wir betrachten die Burgers-Gleichung mit der Anfangsfunktion

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0, \\ 1 & : x \geq 0. \end{cases}$$

Die Methode der Charakteristiken bestimmt klassische Lösungen eindeutig für $t > 0$, aber nicht im Sektor $\{(t, x) : 0 < x < t\}$. Wir nehmen jetzt zwei Funktionen:

$$u_1(t, x) = \begin{cases} 0 & : x < t/2, \\ 1 & : x > t/2, \end{cases}, \quad u_2(t, x) = \begin{cases} 0 & : x < 0, \\ \frac{x}{t} & : 0 < x < t, \\ 1 & : x > t. \end{cases}$$

Es ist u_1 eine stückweise stetig differenzierbare Funktion, die außerhalb der Kurve $\{x = t/2\}$ die Differentialgleichung klassisch löst und auf der Kurve die Rankine–Hugoniot–Sprungbedingung erfüllt. Also ist u_1 eine schwache Lösung.

Und es ist u_2 eine stückweise stetig differenzierbare, aber stetige Funktion, die sowohl in $\{(t, x) : x < 0\}$ als auch in $\{(t, x) : 0 < x < t\}$ sowie in $\{(t, x) : x > t\}$ die Differentialgleichung klassisch löst, und demnach eine schwache Lösung ist.

Wir beobachten, daß u_2 zwar unstetige Anfangsdaten hat, aber für positive Zeiten trotzdem eine stetige Funktion ist. Es können also Unstetigkeiten der Anfangsdaten verschwinden.

Lösungen von einer Gestalt wie u_2 werden „Verdünnungswelle“¹ genannt. Man denke an einen Zug im Tunnel, der hinter sich die Luft auseinanderzieht (also verdünnt) und vor sich zusammenpreßt (also eine „Bugwelle“ vor sich herschiebt).

Wir haben also zwei Lösungen und fragen, welche davon nun die „physikalisch vernünftige“ ist. Wir könnten u_2 den Vorzug geben, denn dies ist im Gegensatz zu u_1 immerhin stetig, aber das nächste Beispiel zeigt uns, daß die Situation komplizierter ist. Wichtiger ist, daß u_1 einen „Verdünnungsschock“ beschreibt, der unphysikalisch erscheint.

Beispiel 3.12. Wir betrachten wieder die Burgers–Gleichung mit den Anfangsdaten

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : x < 0, \\ -1 & : x > 0, \end{cases}$$

und für jedes $\alpha \geq 1$ definieren wir eine Funktion $u_\alpha = u_\alpha(t, x)$ durch

$$u_\alpha(t, x) = \begin{cases} +1 & : 2x < (1 - \alpha)t, \\ -\alpha & : (1 - \alpha)t < 2x < 0, \\ +\alpha & : 0 < 2x < (\alpha - 1)t, \\ -1 & : (\alpha - 1)t < 2x. \end{cases}$$

Wir prüfen nach, daß für jede der drei Unstetigkeitskurven die Sprungbedingung erfüllt ist, und somit liegt für jedes $\alpha \geq 1$ eine schwache Lösung vor.

Wir haben also unendlich viele schwache Lösungen gefunden, und alle sind unstetig. Aber die einzige ohne einen Verdünnungsschock (also ohne den Sprung von $-\alpha$ auf $+\alpha$) liegt für $\alpha = 1$ vor.

Definition 3.13. Sei $f'' > 0$ und sei u eine schwache Lösung zu (3.1). Wir sagen, daß u die Entropie–Bedingung erfüllt, wenn es ein positives E gibt, so daß für alle $t > 0$, $h > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$\frac{1}{h}(u(t, x + h) - u(t, x)) \leq \frac{E}{t}$$

gilt.

Zur Interpretation halten wir t fest und lassen x von $-\infty$ bis nach $+\infty$ laufen. Dann verbietet die Entropie–Bedingung, daß $x \mapsto u(t, x)$ eine Sprungunstetigkeit hat, bei der ein Sprung „nach oben“ erfolgt.

In der konkreten Situation der beiden obigen Beispiele bewirkt diese Bedingung, daß alle schwachen Lösungen mit einem Verdünnungsschock ausgeschlossen werden, sodaß jeweils nur eine Lösung übrigbleibt.

Diese Entropie–Bedingung ist nicht so exotisch, wie sie zunächst aussehen mag:

Lemma 3.14. Klassische Lösungen erfüllen immer die Entropie–Bedingung, wenn f'' überall positiv ist.

Beweis. Sei $u \in C^1$ für $0 \leq t < t_0$ und alle $x \in \mathbb{R}$. Dann haben wir die Charakteristiken der Form $x = x_0 + a(u_0(x_0))t$ mit $a(u) = f'(u)$, und entlang einer solchen Charakteristik hat u überall den Wert

¹rarefaction wave

$u_0(x_0)$. Wir halten t fest und betrachten x_0 als Funktion von x . Dann ist mit derselben Rechnung wie am Ende von Abschnitt 3.2:

$$u_x(t, x) = u'_0(x_0) \frac{\partial x_0}{\partial x} = \frac{u'_0(x_0)}{1 + t \frac{\partial}{\partial x_0} a(u_0(x_0))} = \frac{u'_0(x_0)}{1 + t f''(u_0(x_0)) \cdot u'_0(x_0)}.$$

Im Zeitintervall $[0, t_0)$ ist nach Voraussetzung eine Gradientenkatastrophe noch nicht eingetreten, also ist der Nenner nicht Null für $(t, x) \in [0, t_0) \times \mathbb{R}$. Da für $t = 0$ der Nenner gleich eins ist, muß er immer positiv sein.

Wenn nun $u'_0(x_0) \leq 0$ sein sollte, dann ist $u_x(t, x) \leq 0$, und die Entropie-Bedingung gilt, denn $\frac{E}{t}$ ist positiv.

Wenn aber $u'_0(x_0) > 0$ ist, dann haben wir

$$0 < u_x(t, x) \leq \frac{u'_0(x_0)}{t f''(u_0(x_0)) \cdot u'_0(x_0)} \leq \frac{1}{t f''(u_0(x_0))},$$

und die Entropie-Bedingung gilt, wenn wir

$$E := \left(\min_{s \in \mathbb{R}} f''(s) \right)^{-1}$$

setzen. □

Unser jetziger Kenntnisstand in Bezug auf (3.1) ist:

- in einigen Beispielen scheint die Entropie-Bedingung geeignet, die physikalisch relevante Lösung von unsinnigen Lösungen zu unterscheiden.
- Es ist unklar, ob es für jedes f und jede Anfangsfunktion u_0 eine global existierende schwache Lösung gibt, die zusätzlich die Entropie-Bedingung erfüllt.
- Es ist unklar, ob eine solche Lösung die einzige wäre.

Wir verschaffen uns eine alternative Formulierung der Entropie-Bedingung: Sei $f'' > 0$ überall. Wenn eine Sprung-Unstetigkeit vorliegt, dann ist $u_l > u_r$. Außerdem haben wir die Rankine-Hugoniot-Sprungbedingung:

$$s = \frac{f(u_r) - f(u_l)}{u_r - u_l} = f'(\xi)$$

mit einem ξ zwischen u_r und u_l , also

$$u_r < \xi < u_l.$$

Wegen $f'' > 0$ ist f' streng monoton wachsend, und somit ist die Ungleichung

$$f'(u_l) > s > f'(u_r) \tag{3.3}$$

eine zweite Formulierung der Entropie-Bedingung. Wegen $f' = a$ gilt dann auch:

Die Schockgeschwindigkeit liegt zwischen der Charakteristiken-Geschwindigkeit des linken Teilgebiets und der Charakteristiken-Geschwindigkeit des rechten Teilgebiets.

Wie aus den Hausaufgaben, Blatt 2, Aufgabe 2b ersichtlich, stellt sich die Frage, was überhaupt in einer bestimmten Situation die richtige Gleichung ist. Denn das Umformen einer Differentialgleichung macht aus einer schwachen Lösung nicht unbedingt wieder eine schwache Lösung. Naturgemäß kann diese Frage innerhalb der Mathematik nicht beantwortet werden.

3.4 Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen

Wie bisher betrachten wir das Anfangswertproblem (3.1) unter den Annahmen

$$\begin{aligned} u_0 &\in L^\infty(\mathbb{R}), & \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &=: M, \\ f &\in C^2(\mathbb{R}), & f''(s) &> 0 \quad \text{falls} \quad -M \leq s \leq M. \end{aligned}$$

Dann finden wir eine positive Zahl μ mit $\mu := \min\{f''(s) : -M \leq s \leq M\}$.

Es wird sich herausstellen, daß folgende Zahl A eine obere Schranke für die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Informationen ist:

$$A := \max\{|f'(s)| : -M \leq s \leq M\}.$$

Dann haben wir folgendes zentrale Ergebnis, das wir hier nicht komplett beweisen werden aufgrund seiner Länge (ein vollständiger Beweis findet sich in [3]):

Theorem 3.15. *Es existiert eine globale schwache Lösung u (und sie wird im Beweisverlauf auch konstruiert) mit folgenden Eigenschaften:*

- $|u(t, x)| \leq M$ für alle $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$,
- Es gibt eine nur von M , μ und A abhängige Konstante E , mit der die Entropie-Bedingung gilt,
- u hängt in folgendem Sinne stetig von den Anfangsdaten u_0 ab: Seien u_0 und v_0 aus $L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ zwei Anfangswertfunktionen, wobei $\|v_0\|_{L^\infty} \leq \|u_0\|_{L^\infty}$. Seien weiterhin u und v die sich daraus gemäß der Konstruktion im Beweis ergebenden globalen schwachen Lösungen. Dann gilt für alle $x_1 < x_2$ und alle t folgende Ungleichung:

$$\int_{x_1}^{x_2} |u(t, x) - v(t, x)| \, dx \leq \int_{x_1 - At}^{x_2 + At} |u_0(x) - v_0(x)| \, dx.$$

Dazu einige Anmerkungen.

- Die erste Eigenschaft ist für klassische Lösungen schon bekannt durch die Lösungsdarstellung; und hier garantiert sie, daß die Werte von u in einem Intervall verbleiben, in dem wir Aussagen über f' und f'' haben.
- Wenn $u_0(x) = v_0(x)$ für $z_1 \leq x \leq z_2$ und wenn $0 < t < (z_2 - z_1)/(2A)$, dann ist auch $u(t, x) = v(t, x)$ für $z_1 + At \leq x \leq z_2 - At$. Die letzte Ungleichung macht also eine gewisse Eindeutigkeitsaussage; aber diese bezieht sich nur auf die von uns konstruierten Lösungen. Es kann ja sein, daß es noch andere Lösungen gibt, die von unserem Konstruktionsverfahren nicht erreicht werden.

Zunächst stellen wir fest, daß u_0 eine unbeschränkte Variation haben kann (auch lokal), aber es gilt:

Lemma 3.16. *Für positive t hat $u(t, \cdot)$ als Funktion von x lokal eine beschränkte Variation.*

Beweis. Es sei $c_1 > E/t$ eine gewählte Zahl, und damit setzen wir $w(t, x) := u(t, x) - c_1 x$. Dann ist für jedes positive h :

$$w(t, x+h) - w(t, x) = u(t, x+h) - u(t, x) - c_1 h \leq h \left(\frac{E}{t} - c_1 \right) < 0,$$

also ist $w(t, \cdot)$ als Funktion von x streng monoton fallend. Dann ist aber $x \mapsto u(t, x) = w(t, x) + c_1 x$ die Summe aus einer fallenden und einer steigenden Funktion, also lokal von beschränkter Variation. \square

Die Konsequenz daraus ist, daß $u(t, \cdot)$ (im Gegensatz zu u_0) höchstens abzählbar viele Sprungunstetigkeiten haben kann und auch fast überall differenzierbar ist.

Der Beweis von Theorem 3.15 beruht auf der Methode der finiten Differenzen. Dazu wählen wir eine Zeitschrittweite $h = \Delta t$ und eine Ortsschrittweite $l = \Delta x$, und wir betrachten in $\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x$ ein Gitter mit

Knotenpunkten der Form $(t, x) = (\alpha h, \beta l)$, wobei $\alpha \in \mathbb{N}_0$ und $\beta \in \mathbb{Z}$. Der Funktionswert von u an dieser Stelle soll angenähert werden durch eine Zahl u_β^α :

$$u_\beta^\alpha \approx u(\alpha h, \beta l), \quad \alpha \in \mathbb{N}_0, \quad \beta \in \mathbb{Z}.$$

Es ist bekannt, daß wir für eine Funktion $w = w(x)$ aus dem C^3 die erste Ableitung durch den zentralen Differenzenquotienten annähern können,

$$\partial_x w(x) = \frac{w(x+l) - w(x-l)}{2l} + \mathcal{O}(l^2).$$

Davon wollen wir uns leiten lassen (auch wenn wir bei weitem nicht erwarten dürfen, daß unsere Lösungen die Regularität C^3 haben werden). Unser numerisches Schema für die Gleichung $u_t + \partial_x f(u) = 0$ soll aussehen wie folgt:

$$\frac{1}{h} \left(u_n^{k+1} - \frac{u_{n-1}^k + u_{n+1}^k}{2} \right) + \frac{1}{2l} (f(u_{n+1}^k) - f(u_{n-1}^k)) = 0,$$

und wir denken dabei an eine Induktion über k . Damit lautet die Iterationsvorschrift dann

$$u_n^{k+1} = \frac{u_{n-1}^k + u_{n+1}^k}{2} - \frac{h}{2l} (f(u_{n+1}^k) - f(u_{n-1}^k)), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Die Startwerte für $k = 0$ sollen gegeben sein durch die arithmetischen Mittel

$$u_n^0 := \frac{1}{l} \int_{x=(n-1/2)l}^{x=(n+1/2)l} u_0(x) dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Weiterhin verlangen wir von den Schrittweiten die Ungleichung

$$\frac{Ah}{l} \leq 1.$$

Dies bedeutet, daß die dem Gitter innewohnende Ausbreitungsgeschwindigkeit l/h mindestens so groß ist wie die tatsächliche Geschwindigkeit der Charakteristiken, und diese ist $\leq A$. Ansonsten ist es unmöglich, daß dieses Differenzenverfahren eine taugliche Näherung liefert, denn besonders schnelle Charakteristiken könnten dann von diesem Verfahren nicht wiedergegeben werden.

Lemma 3.17. *Für alle $(n, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$ ist $|u_n^k| \leq M$.*

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Induktion über k . Die Aussage gilt für $k = 0$. Weiterhin ist, mit einer Zwischenstelle θ_n^k zwischen u_{n+1}^k und u_{n-1}^k ,

$$\begin{aligned} u_n^{k+1} &= -\frac{h}{2l} (f(u_{n+1}^k) - f(u_{n-1}^k)) + \frac{1}{2} (u_{n+1}^k + u_{n-1}^k) \\ &= \frac{-h}{2l} f'(\theta_n^k) \cdot (u_{n+1}^k - u_{n-1}^k) + \frac{1}{2} (u_{n+1}^k + u_{n-1}^k) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{h}{2l} f'(\theta_n^k) \right) u_{n-1}^k + \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{2l} f'(\theta_n^k) \right) u_{n+1}^k. \end{aligned}$$

Wegen der Bedingung $Ah/l \leq 1$ ist

$$\left| \frac{h}{2l} f'(\theta_n^k) \right| \leq \frac{h}{2l} A \leq \frac{1}{2},$$

und damit haben wir dann

$$\frac{1}{2} \pm \frac{h}{2l} f'(\theta_n^k) \geq 0.$$

Also ist u_n^{k+1} eine konvexe Linearkombination von u_{n+1}^k und u_{n-1}^k , liegt also insbesondere zwischen diesen beiden Werten. \square

Wenn man übrigens versucht, Systeme von Evolutionsgleichungen zu betrachten anstatt einer einzelnen Evolutionsgleichung, dann gelingt es nicht, ein Analogon des vorigen Lemmas zu zeigen für die Näherungslösungen u_n^k , sodaß nicht garantiert ist, daß die Werte von u in dem Bereich verbleiben, wo wir Kenntnisse haben über das Verhalten von f . Das ist einer der Gründe, warum das Verständnis von Systemen von Erhaltungsgleichungen immer noch lückenhaft ist.

Lemma 3.18 (Diskrete Entropiebedingung). *Sei $c = \min(\frac{\mu}{2}, \frac{A}{4M})$ und $E = \frac{1}{c}$. Dann gilt für alle $(n, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$ die diskrete Entropie-Ungleichung*

$$\frac{u_n^k - u_{n-2}^k}{2l} \leq \frac{E}{kh}.$$

Man beachte hierbei, daß $2l$ der Abstand der beiden Knoten in Ortsrichtung ist, und kh beschreibt die aktuelle Zeit.

(Ohne Beweis.)

Lemma 3.19 (Beschränkte Variation bzgl. x für festes t). *Seien $\alpha > 0$ und $X > 1$ fest gewählt. Dann gibt es eine Konstante c , die nur von M , X und α abhängt, mit folgender Eigenschaft: wenn $kh \geq \alpha$, dann ist*

$$\sum_{|n| \leq X/l} |u_{n+2}^k - u_n^k| \leq C.$$

Die Idee hinter dem Beweis ist es, die Schritte von Lemma 3.16 für die hier vorliegende diskrete Situation zu reproduzieren.

Beweis. Es sei $c_1 > E/\alpha$ eine gewählte Zahl, und damit setzen wir $w_n^k := u_n^k - c_1 nl$. Dann ist

$$w_{n+2}^k - w_n^k = u_{n+2}^k - u_n^k - 2c_1 l \leq 2l \cdot \frac{E}{kh} - 2c_1 l = 2l \left(\frac{E}{kh} - c_1 \right) \leq 2l \left(\frac{E}{\alpha} - c_1 \right) < 0.$$

Also ist die Folge der w_n^k beim Übergang von n auf $n+2$ streng monoton fallend. Damit ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \sum_{|n| \leq X/l} |u_{n+2}^k - u_n^k| &\leq \sum_{|n| \leq X/l} |w_{n+2}^k - w_n^k| + \sum_{|n| \leq X/l} 2c_1 l \\ &= - \sum_{|n| \leq X/l} (w_{n+2}^k - w_n^k) + 2c_1 l \cdot \frac{2X+l}{l} \\ &\leq 2 \max_{|n| \leq X/l} |w_n^k| + c_2 X \\ &\leq 2M + 2c_1 X + c_2 X, \end{aligned}$$

mit einer passenden Konstanten c_2 . □

Dieser Satz gibt uns also Informationen über die Schwankungen von u in Ortsrichtung. Als nächstes schauen wir uns Schwankungen in Zeitrichtung an:

Lemma 3.20. *Sei ein positives δ gewählt, und seien $h/l \geq \delta$ sowie $0 < l, h \leq 1$. Dann gibt es eine Zahl L mit folgenden Eigenschaften: wenn $k > p$ und $k - p$ eine gerade Zahl ist, sowie $ph \geq \alpha > 0$, dann ist*

$$\sum_{|n| \leq X/l} |u_n^k - u_n^p| \leq L(k-p)h.$$

Hierbei ist $L = L(\delta, \alpha, X)$.

(Ohne Beweis.) Eine analoge Version gibt es, wenn $k - p$ ungerade ist.

Lemma 3.21 (Diskrete Stabilitätsaussage). Seien $\{u_n^0\}_{n \in \mathbb{Z}}$ und $\{v_n^0\}_{n \in \mathbb{Z}}$ zwei Familien von Anfangswerten, und seien $\{u_n^k\}_{k,n}$ sowie $\{v_n^k\}_{k,n}$ die dazugehörigen diskreten Lösungen, wobei wir voraussetzen, daß $\sup_{n \in \mathbb{Z}} |u_n^0| \leq M$ und $\sup_{n \in \mathbb{Z}} |v_n^0| \leq M$. Dann gilt

$$\sum_{|n| \leq N} |u_n^k - v_n^k| \cdot l \leq \sum_{|n| \leq N+k} |u_n^0 - v_n^0| \cdot l.$$

Beweis. Wir setzen $w_n^k := u_n^k - v_n^k$, und dann finden wir

$$\begin{aligned} w^{k+1} &= u_n^{k+1} - v_n^{k+1} \\ &= \frac{u_{n+1}^k + u_{n-1}^k}{2} - \frac{h}{2l} \left(f(u_{n+1}^k) - f(u_{n-1}^k) \right) \\ &\quad - \frac{v_{n+1}^k + v_{n-1}^k}{2} + \frac{h}{2l} \left(f(v_{n+1}^k) - f(v_{n-1}^k) \right) \\ &= \frac{u_{n+1}^k - v_{n+1}^k}{2} - \frac{h}{2l} \left(f(u_{n+1}^k) - f(v_{n+1}^k) \right) \\ &\quad + \frac{u_{n-1}^k - v_{n-1}^k}{2} + \frac{h}{2l} \left(f(u_{n-1}^k) - f(v_{n-1}^k) \right) \\ &= \frac{1}{2} w_{n+1}^k - \frac{h}{2l} w_{n+1}^k f'(\theta_{n+1}^k) \\ &\quad + \frac{1}{2} w_{n-1}^k + \frac{h}{2l} w_{n-1}^k f'(\theta_{n-1}^k) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{2l} f'(\theta_{n+1}^k) \right) w_{n+1}^k + \left(\frac{1}{2} + \frac{h}{2l} f'(\theta_{n-1}^k) \right) w_{n-1}^k, \end{aligned}$$

und wieder sind hier die beiden großen Klammern ≥ 0 , wegen der Bedingung $Ah/l \leq 1$. Damit ergibt sich also

$$\begin{aligned} \sum_{|n| \leq N} |w_n^{k+1}| &\leq \sum_{m=-N+1}^{N+1} \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{2l} f'(\theta_m^k) \right) |w_m^k| + \sum_{m=-N-1}^{N-1} \left(\frac{1}{2} + \frac{h}{2l} f'(\theta_m^k) \right) |w_m^k| \\ &\leq \sum_{m=-N-1}^{N+1} 1 \cdot |w_m^k|, \end{aligned}$$

was den Beweis vollendet. □

Als nächstes ergänzen wir die Gitterpunktnäherungen zu einer Funktion von t und x :

$$U_{lh}(t, x) := u_n^k, \quad \text{wenn } kh \leq t < (k+1)h, \quad nl \leq x < (n+1)h.$$

Lemma 3.22. Es existiert eine Teilfolge $\{U_{l_i h_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$, die zu einer mäsbaren Funktion $u = u(t, x)$ konvergiert in folgendem Sinne: für alle $X > 0$, $t > 0$ und $T > 0$ ist

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq X} |U_{l_i h_i}(t, x) - u(t, x)| \, dx &= 0, \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{t=0}^T \int_{|x| \leq X} |U_{l_i h_i}(t, x) - u(t, x)| \, dx \, dt &= 0. \end{aligned}$$

Der Grenzwert u erfüllt die Stabilitätsungleichung und

$$\sup_{(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} |u(t, x)| \leq M.$$

Der Beweis beruht auf dem Konzept kompakter Mengen im topologischen Raum $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, und bei der Beschreibung der Kompaktheit bilden die beiden Lemmata über die Beschränkung der Schwankungen in Orts- und Zeitrichtung eine entscheidende Rolle.

Lemma 3.23. *Die im vorigen Lemma konstruierte Funktion u erfüllt die Entropiebedingung und ist eine schwache Lösung des Anfangswertproblems (3.1).*

(Ohne Beweis.)

Damit ist die Existenz einer zeitglobalen schwachen Lösung, die die Entropiebedingung erfüllt, sichergestellt, der Beweis zu Theorem 3.15 ist komplett, und als Nächstes betrachten wir die Frage nach der Eindeutigkeit der Lösungen.

Satz 3.24. *Sei $f \in C^2$ mit $f'' > 0$ überall, und seien u, v zwei schwache Lösungen zu (3.1), die beide die Entropiebedingung erfüllen. Dann ist $u = v$.*

Auch der Beweis dieses Satzes findet sich in [3]; allerdings ist er lang (7 Seiten) und aufwendig, sodaß wir es bei einer kleinen Skizze belassen.

Wir erinnern an die lineare Algebra: Seien U und V endlichdimensionale Hilberträume, und sei $A \in L(U, V)$ linear. Wenn dann $u \in \ker A$ ist und $b \in V$ beliebig, dann ist

$$0 = \langle Au, b \rangle_V = \langle u, A^*b \rangle_U,$$

also $\ker A \perp \text{img } A^*$. Dies kann nun mit geeigneten Modifikationen auf unendlichdimensionale Räume U und V verallgemeinert werden, und wir bekommen $\ker A \subset (\text{img } A^*)^\perp$.

Nun ist die Injektivität von A äquivalent zu $\ker A = \{0\}$, und dafür ist hinreichend, daß $\text{img } A^*$ dicht in U enthalten ist.

Diesen Gedanken wollen wir auf unsere Situation übertragen. Wir betrachten die Menge aller Funktionen, die die Anfangsbedingung und die Entropiebedingung erfüllen (das ist kein Vektorraum), und darauf betrachten wir den Operator A , der u abbildet auf $u_t + \partial_x f(u)$. Dieser ist offensichtlich nichtlinear, und wir fragen nach seiner Injektivität. Abgesehen davon existiert $u_t + \partial_x f(u)$ gar nicht als Funktion, wenn u lediglich meßbar ist.

Die Injektivität von A ist nachgewiesen, wenn wir zeigen können, daß für beide schwache Lösungen u und v gilt, daß

$$\int_{t=0}^{\infty} \int_{x \in \mathbb{R}} (u - v) \varphi \, dx \, dt = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^1.$$

Wir wissen bereits, daß für alle $\psi \in C_0^1$ gilt, daß

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{\infty} \int_{x \in \mathbb{R}} u \psi_t + f(u) \psi_x \, dx \, dt + \int_{x \in \mathbb{R}} u_0(x) \psi(0, x) \, dx &= 0, \\ \int_{t=0}^{\infty} \int_{x \in \mathbb{R}} v \psi_t + f(v) \psi_x \, dx \, dt + \int_{x \in \mathbb{R}} u_0(x) \psi(0, x) \, dx &= 0. \end{aligned}$$

Abziehen liefert dann

$$\int_{t=0}^{\infty} \int_{x \in \mathbb{R}} (u - v) \psi_t + (f(u) - f(v)) \psi_x \, dx \, dt = 0,$$

oder auch

$$\int_{t=0}^{\infty} \int_{x \in \mathbb{R}} (u - v) \cdot \left(\psi_t + \frac{f(u) - f(v)}{u - v} \psi_x \right) \, dx \, dt = 0.$$

Wir setzen nun $F(t, x) := \frac{f(u) - f(v)}{u - v}$ und haben damit gezeigt, daß für alle $\psi \in C_0^1$ gilt, daß

$$\int_{t=0}^{\infty} \int_{x \in \mathbb{R}} (u - v) \cdot \left(\psi_t + F \psi_x \right) \, dx \, dt = 0.$$

Die Idee ist nun, jedes $\varphi \in C_0^1$ darzustellen als $\varphi = \psi_t + F \psi_x$ mit $\psi \in C_0^1$. Das würde bedeuten, daß wir den Operator, der ψ auf $\psi_t + F \psi_x$ abbildet, als surjektiv nachweisen. Diesen Operator können wir als nichtlineare Version von A^* interpretieren, wenn wir so wollen.

Es gibt aber eine entscheidende Schwierigkeit: weil u und v lediglich meßbar sind, hat $F = F(t, x)$ eine sehr schlechte Regularität, und die Differentialgleichung $\varphi = \psi_t + F\psi_x$ ist nur mühsam zu lösen.

Der Ausweg besteht dann darin, u und v mittels geeigneter Faltungen mit Glättungskernen durch glattere Funktionen anzunähern, mit denen man dann die Rechnungen ausführt, und anschließend diese Näherungen nach u und v konvergieren läßt.

3.5 Evolutionsgleichungen

Sei $0 \leq t < \infty$, $x \in \mathbb{R}$ und $u = u(t, x): [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$. Wir betrachten zwei Systeme:

$$u_t = Au_x, \tag{3.4}$$

$$u_t = Au_x + Bu_{xx}, \tag{3.5}$$

mit konstanten Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, und mit den üblichen Anfangsdaten u_0 , diesmal komplexwertig. Wir wünschen von diesem System, daß es *wohlgestellt* ist, worunter wir verstehen wollen, daß $u(t, \cdot)$ stetig von u_0 abhängt, gemessen in der $L^\infty(\mathbb{R}_x)$ -Norm.

Definition 3.25. *Wir sagen, daß das System (3.4) bzw. (3.5) wohlgestellt ist, wenn es für jedes $t > 0$ eine Konstante $C(t)$ gibt (unabhängig von u), sodaß für jede Lösung u gilt:*

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(t) \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Hierbei soll $C(t)$ für $t \rightarrow 0$ endlich bleiben.

Lemma 3.26. *Wenn das Problem (3.4) wohlgestellt ist, dann sind die Eigenwerte von A reell.*

Beweis. Wir testen mit speziell konstruierten Lösungen

$$u = u(t, x) = \exp(i(\lambda t + \mu x))\vec{\xi}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \quad \vec{\xi} \in \mathbb{C}^n, \quad \vec{\xi} \neq 0.$$

Dann ist $u(0, x) = \exp(i\mu x)\vec{\xi}$, und damit dies zum $L^\infty(\mathbb{R})$ gehört, muß $\mu \in \mathbb{R}$ sein. Das Einsetzen dieses Ansatzes liefert dann

$$i\lambda \exp(i(\lambda t + \mu x))\vec{\xi} = i\mu \exp(i(\lambda t + \mu x))A\vec{\xi},$$

also auch $A\vec{\xi} = (\lambda/\mu)\vec{\xi}$, und demnach ist λ/μ ein Eigenwert von A . Wir schreiben ihn als $\lambda/\mu = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, und dann folgt

$$u(t, x) = \vec{\xi} e^{i\mu(at+x)} e^{-\mu bt} \implies |u(t, x)| = |u_0(x)| e^{-\mu bt} \implies \|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = e^{-\mu bt} \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Wenn $b = 0$ ist, dann ist die Bedingung der Wohlgestelltheit für dieses spezielle Lösungsbeispiel u erfüllt, mit einem Kandidaten $C(t) = 1$.

Angenommen, es wäre $b \neq 0$. Dann nehmen wir z.B. $|\vec{\xi}| = 1/N$ mit einem $N \gg 1$ und

$$\mu = \frac{-2N \ln N}{b}.$$

Dann folgt $\|u_0\|_{L^\infty} = |\vec{\xi}| = 1/N$, jedoch

$$\|u(1/N, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = e^{-\mu b/N} \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = e^{2 \ln N} \|u_0\|_{L^\infty} = N,$$

und N können wir beliebig wählen. Obwohl dann $\|u_0\|_{L^\infty}$ und $t = 1/N$ nach Null streben, explodiert $\|u(t, \cdot)\|_{L^\infty}$. Das ist ein Widerspruch zur Wohlgestelltheit. Also gilt für jeden Eigenwert λ/μ von A , daß $\lambda/\mu = a \in \mathbb{R}$. \square

Definition 3.27. *Wenn die Eigenwerte von A alle reell sind, dann heißt das System (3.4) (schwach) hyperbolisch. Wenn die Eigenwerte von A alle reell und paarweise verschieden sind, dann heißt das System (3.4) strikt hyperbolisch. Und wenn das System (3.4) hyperbolisch ist, mit einer diagonalisierbaren Matrix A , dann heißt dieses System symmetrisierbar hyperbolisch.*

Man kann zeigen: wenn ein System symmetrisierbar hyperbolisch ist (was insbesondere im Falle strikter Hyperbolizität gilt), dann liegt Wohlgestelltheit vor. In diesem Sinne haben wir beinahe eine Genau–Dann–Wenn Aussage. Die verbleibenden Lücke zu schließen (insbesondere im Fall variabler Koeffizienten) ist bis heute ein ungelöstes Problem. Wenn die Koeffizienten a_{jk} analytisch und nur von t abhängen, dann ist Wohlgestelltheit äquivalent mit schwacher Hyperbolizität. Wenn die Koeffizienten a_{jk} aber nur C^∞ von t abhängen, dann folgt aus der schwachen Hyperbolizität keineswegs die Wohlgestelltheit, wie Gegenbeispiele zeigen.

Lemma 3.28. *Wenn das System (3.5) wohlgestellt ist, dann haben alle Eigenwerte von B einen Realteil ≥ 0 .*

Beweis. Wir machen denselben Ansatz $u(t, x) = \exp(i(\lambda t + \mu x))\vec{\xi}$. Genauso wie oben bekommen wir $\mu \in \mathbb{R}$, damit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Einsetzen in (3.5) liefert dann

$$i\lambda \exp(i(\lambda t + \mu x))\vec{\xi} = i\mu \exp(i(\lambda t + \mu x))A\vec{\xi} + (i\mu)^2 \exp(i(\lambda t + \mu x))B\vec{\xi},$$

oder auch $i\lambda/\mu^2$ als Eigenwert von $-B + (i/\mu)A$. Dies ist eine komplizierte Matrix, aber wir können $\mu \rightarrow \infty$ schicken und verwenden, daß die Eigenwerte einer Matrix stetig von dieser Matrix abhängen, also ist dann

$$-\frac{i\lambda}{\mu^2} = c + id + r(\mu) + is(\mu),$$

wobei $c + id$ mit $c, d \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von B ist, und weiterhin $\lim_{|\mu| \rightarrow \infty} (r(\mu) + is(\mu)) = 0$. Dann folgt

$$-i\lambda = \mu^2(c + id + r + is),$$

und somit ist dann $u(t, x) = \exp(-\mu^2(c + id + r + is)t + i\mu x)\vec{\xi}$. Wegen $\mu \in \mathbb{R}$ folgt schließlich

$$|u(t, x)| = \exp(-(c + r(\mu))\mu^2 t)|\vec{\xi}|, \quad \|u_0\|_{L^\infty} = |\vec{\xi}|.$$

Wenn nun $c < 0$ ist, dann bekommen wir einen Widerspruch zur Wohlgestelltheit, indem wir $\mu \gg 1$ wählen und z.B. $t = 1$ festhalten.

Also muß $c \geq 0$ sein, wenn Wohlgestelltheit für (3.5) vorliegt. \square

Es gilt sogar noch mehr: wenn $c = 0$ ist, dann müssen die Eigenwerte von A noch eine geeignete Bedingung erfüllen, damit das Problem wohlgestellt ist.

Definition 3.29. *Wenn die Eigenwerte von B sämtlich positiven Realteil haben, dann heißt das System (3.5) parabolisch.*

Als Beispiel nehmen wir $n = 1$ und betrachten die Burgers–Gleichung bzw. die viskose Burgers–Gleichung:

$$u_t + a(u)u_x = 0, \quad u_t + a(u)u_x = \varepsilon u_{xx},$$

wobei a reellwertig ist, und ε ist positiv.

Allgemeiner betrachten wir jetzt Systeme

$$u_t + \partial_x f(u) = 0, \quad u_t + \partial_x f(u) = (B(u)u_x)_x,$$

und wir verlangen: die Jacobi–Matrix $f'(u)$ hat nur reelle Eigenwerte, und B hat nur Eigenwerte mit Realteil ≥ 0 .

Beispiel 3.30. *Die Gleichungen der Gasdynamik können in Eulerkoordinaten geschrieben werden als*

$$\begin{aligned} \varrho_t + u\varrho_x + \varrho u_x &= 0, \\ u_t + uu_x + \frac{1}{\varrho}p_x &= 0, \\ s_t + us_x &= 0, \end{aligned}$$

und wir schreiben die Zustandsgleichung als $e = e(s, v)$ mit $v = 1/\rho$ und $p = -\frac{\partial e}{\partial v}$. Dann ist $p_x = -e_{vv}v_x - e_{vs}s_x = e_{vv}v^2\rho_x - e_{vs}s_x$, und mit $U = (\rho, u, s)^\top$ erhalten wir dann

$$U_t + \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ e_{vv}\rho^{-3} & u & -\rho^{-1}e_{vs} \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \partial_x U = 0.$$

Für die Matrix schreiben wir A . Diese hat die Eigenwerte

$$\lambda_1 = u, \quad \lambda_{2,3} = u \pm \sqrt{e_{vv}\rho^{-2}},$$

und nun ist $e_{vv} = -p_v > 0$ aus thermodynamischen Gründen, also ist das System hyperbolisch.

Beispiel 3.31. Die Gleichungen der Gasdynamik für ein viskoses, wärmeleitendes Fluid in Eulerkoordinaten lauten

$$\begin{aligned} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x &= \mu u_{xx}, \\ \left(\rho \left(\frac{u^2}{2} + e\right)\right)_t + \left(\rho u \left(\frac{u^2}{2} + i\right)\right)_x &= \mu(uu_x)_x + \kappa T_{xx}, \end{aligned}$$

mit T als Temperatur, μ als Viskositätskoeffizient, κ als Wärmeleitkoeffizient, diese beiden positiv. Die gesuchten Funktionen seien $U = (\rho, u, T)^\top$. Die Zustandsgleichungen schreiben wir als $e = e(\rho, T)$ und $i = i(\rho, T)$. Die auf U_{xx} wirkende Matrix ist dann

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & \mu u & \kappa \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $0, \mu$ und κ , die allesamt ≥ 0 sind.

3.6 Viskositätslösungen

In der Modellierung entstehen Erhaltungsgleichungen teilweise als Grenzprozeß, bei dem man Viskositätsterme wegläßt zum Zwecke der Vereinfachung. Jetzt wollen wir diese Viskositätsterme etwas systematischer behandeln.

Rein **formal** entsteht das System von Erhaltungsgleichungen $u_t + \partial_x f(u) = 0$ mit $u: [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ aus dem parabolischen System $u_t + \partial_x f(u) = \varepsilon B u_{xx}$ durch einen Grenzprozeß $\varepsilon \rightarrow +0$. Mit dem Wort „formal“ wollen wir andeuten, daß es keineswegs klar ist, ob eine Folge $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ von Lösungen des parabolischen Systems für $\varepsilon \rightarrow +0$ gegen eine Lösung u des hyperbolischen Systems konvergiert, und es ist auch nicht klar, ob jede Lösung u des hyperbolischen Systems als Grenzwert einer solchen Folge erhalten werden kann. Wenn doch, dann wollen wir ein solches u als *Viskositätslösung* des Systems $u_t + \partial_x f(u) = 0$ bezeichnen.

Unsere Annahmen sind: die Jacobi-Matrix f' hat nur reelle und verschiedene Eigenwerte. Die Viskositätsmatrix B hat nur Eigenwerte mit positivem Realteil.

Jetzt wollen wir darlegen: wenn eine Lösung u zu $u_t + \partial_x f(u) = 0$ erhalten werden kann als Grenzwert einer Folge $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ von Lösungen des parabolischen Systems, dann gelten (nach einigen Zusatzvoraussetzungen) für u gewisse Entropiebedingungen, die unserer bisherigen Entropieungleichung (3.3) entsprechen.

Sei u eine schwache Lösung zu $u_t + \partial_x f(u) = 0$. Wir setzen nicht voraus, daß (3.3) gilt. Sei $x = x(t)$ eine Sprungunstetigkeitskurve Γ für u , und in einer Umgebung davon sei u außerhalb von Γ stetig. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Γ sei $s = x'(t)$. Dann können wir (z.B. durch eine Verschiebung der x -Variablen) erreichen, daß Γ parametrisiert wird als $x = st$. Wir nehmen an, daß u nahe Γ nur von $x - st$ abhängt.

Wir wollen jetzt nur solche u als physikalisch relevant betrachten, die angenähert werden können durch eine Folge u^ε im Sinne von

$$u(t, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} u^\varepsilon(t, x), \tag{3.6}$$

fast überall in $[0, \infty) \times \mathbb{R}$. Weiterhin wollen wir nur solche u^ε als physikalisch zulässig ansehen, die sich auf die Form

$$u^\varepsilon(t, x) = v(\zeta), \quad \zeta = \frac{x - st}{\varepsilon},$$

bringen lassen, für (t, x) nahe Γ . Das bedeutet, daß mit variierendem ε die u^ε ihre Form behalten, lediglich die Längenskala ändert sich. Diesen Ansatz in das System $u_t^\varepsilon + \partial_x f(u^\varepsilon) = \varepsilon B u_{xx}^\varepsilon$ eingesetzt, erhalten wir

$$-\frac{s}{\varepsilon}v' + f'(v)\frac{1}{\varepsilon}v' = \varepsilon B \frac{1}{\varepsilon^2}v'',$$

oder auch

$$-sv'(\zeta) + \left(f(v(\zeta))\right)' = Bv''(\zeta),$$

was nach Integration uns auf

$$-sv(\zeta) + f(v(\zeta)) + \vec{C} = Bv'(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R},$$

führt, mit einer Integrationskonstanten \vec{C} .

Wir definieren den linken bzw. rechten Grenzwert von u an Γ :

$$u_l := \lim_{x \rightarrow st-0} u(t, x), \quad u_r := \lim_{x \rightarrow st+0} u(t, x),$$

und dann wird (3.6) äquivalent zu

$$\lim_{\zeta \rightarrow -\infty} v(\zeta) = u_l, \quad \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} v(\zeta) = u_r. \quad (3.7)$$

Nun hat jeder Eigenwert von B einen positiven Realteil, also ist B invertierbar, und damit ist

$$\lim_{\zeta \rightarrow -\infty} v'(\zeta) = B^{-1} \left(-su_l + f(u_l) + \vec{C} \right), \quad \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} v'(\zeta) = B^{-1} \left(-su_r + f(u_r) + \vec{C} \right),$$

was mit den Grenzwerten $\lim_{\zeta \rightarrow \pm\infty} v(\zeta) = u_{l,r}$ nur vereinbar ist, wenn

$$-su_l + f(u_l) + \vec{C} = 0, \quad -su_r + f(u_r) + \vec{C} = 0,$$

oder auch $\vec{C} = su_l - f(u_l) = su_r - f(u_r)$ bzw. $s(u_l - u_r) = f(u_l) - f(u_r)$, was genau die vektoriellen Rankine–Hugoniot–Sprungbedingungen sind.

Jetzt gehen wir von einem System zurück zu einer einzelnen Gleichung. Sei also $v = v(\zeta) \in \mathbb{R}$ anstatt \mathbb{R}^n wie bisher, und wir können dann auch $B = 1$ setzen. Dann schreiben wir die Dgl für v als

$$v'(\zeta) = -s(v(\zeta) - u_l) + f(v(\zeta)) - f(u_l) =: \phi(v(\zeta)), \quad \zeta \in \mathbb{R},$$

mit den beiden Randbedingungen (3.7). Es ist $\phi(u_l) = \phi(u_r) = 0$. Sei $u_l > u_r$. Dann ist $v \equiv u_l$ eine Lösung der Dgl, und $v \equiv u_r$ ist auch eine. Weil Lösungstrajektorien sich nicht kreuzen können, schließen wir, daß

$$u_r < v(\zeta) < u_l, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R},$$

und mit derselben Begründung kann ϕ zwischen u_r und u_l keine Nullstelle haben. Dann muß $v = v(\zeta)$ eine fallende Funktion sein, also ist $\phi(v) < 0$ für v zwischen u_r und u_l , also auch

$$\phi'(u_l) \geq 0 \geq \phi'(u_r).$$

Nun ist aber $\phi'(v) = f'(v) - s$, also folgt

$$f'(u_l) \geq s \geq f'(u_r),$$

worin wir (3.3) wiedererkennen. Diese Ungleichung ist etwas schwächer wegen \geq anstatt $>$, aber wir haben jetzt den Vorteil, daß unsere Argumentation darauf verzichtet, $f'' > 0$ zu verlangen.

In [?] finden wir folgendes Ergebnis:

Satz 3.32.

Über eine Verallgemeinerung auf Systeme ist in der Literatur nicht viel bekannt.

3.7 Schock–Ungleichungen und Irreversibilität

Betrachte ein hyperbolisches System im Halbraum

$$u_t + Au_x = 0, \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$$

mit der üblichen Anfangsfunktion u_0 . Wir fragen nach angemessenen Randbedingungen für $x = 0$.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine konstante Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < 0 < \lambda_{k+1} < \dots < \lambda_n$. Dann existiert eine Matrix P mit $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) =: \Lambda$. Wir setzen $v = P^{-1}u$ und erhalten das entkoppelte System $v_t + \Lambda v_x = 0$, also auch $\partial_t v_i + \lambda_i \partial_x v_i = 0$, und für $1 \leq i \leq k$ darf man keine Randbedingungen verlangen, aber für $k+1 \leq i \leq n$ muß man. Also sind $n - k$ Randbedingungen für u erforderlich.

Als nächstes betrachten wir einen Halbraum, der sich mit Geschwindigkeit s bewegt. Für $s = 0$ bekommen wir gerade den obigen Fall. Sei $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < s < \lambda_{k+1} < \dots < \lambda_n$. Dann brauchen wir $n - k$ Randbedingungen für die Lösung in der Region $\{(t, x) : t > 0, x - st > 0\}$.

Die nächste Situation ist ein System $u_t + \partial_x f(u) = 0$ für eine vektorwertige Funktion $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Es seien $\lambda_1(u) < \dots < \lambda_n(u)$ die reellen und verschiedenen Eigenwerte von $f'(u)$, und wir betrachten eine Sprungunstetigkeit, die sich mit Geschwindigkeit s fortbewegt, mit der Parametrisierung $x = st$. Seien u_l und u_r die Grenzwerte von u am linken bzw. rechten Ufer der Unstetigkeit, und wir nehmen an, daß

$$\lambda_k(u_r) < s < \lambda_{k+1}(u_r).$$

Dann sollte man in der Region $\{x - st > 0\}$ analog zu obiger Betrachtung $n - k$ Randbedingungen verlangen. Und für das Gebiet links von der Unstetigkeit sei

$$\lambda_j(u_l) < s < \lambda_{j+1}(u_l),$$

also sollte man in der Region $\{x - st < 0\}$ insgesamt j Randbedingungen verlangen.

Nun haben wir die Rankine–Hugoniot–Sprungbedingungen: $s(u_l - u_r) = f(u_l) - f(u_r)$, was n Gleichungen sind. Wir verwenden eine davon, um s zu ermitteln, was durchführbar ist wegen $u_l \neq u_r$. Dann bleiben $n - 1$ Gleichungen übrig, und es erscheint angemessen, nur solche Lösungen als gültig zu akzeptieren, für die die Anzahl der Rankine–Hugoniot–Sprungbedingungen mit der Gesamtzahl der Randbedingungen übereinstimmt:

$$(n - k) + j = n - 1,$$

also $j = k - 1$. Auf diesem Wege können die Randbedingungen im rechten Teilgebiet aus denen für das linke Teilgebiet bestimmt werden.

Wir verlangen also von der Unstetigkeit, daß ein k mit $1 \leq k \leq n$ existiert mit

$$\lambda_k(u_r) < s < \lambda_{k+1}(u_r), \quad \lambda_{k-1}(u_l) < s < \lambda_k(u_l).$$

Einen solchen Schock nennen wir *k-Schock*. Diese Ungleichungen sind die *Lax–Schock–Bedingungen*, von P.D.Lax (1957).

Für $n = 1$ ist $\lambda(u) = f'(u)$, und diese Ungleichungen reduzieren sich zu $f'(u_l) > s > f'(u_r)$, was wir schon aus (3.3) kennen.

Das Phänomen der Irreversibilität ist typisch für parabolische Gleichungen. Erhaltungsgleichungen sind allerdings typischerweise hyperbolisch, und dort zerstört die Zeitumkehr nicht den Gleichungstyp, zumindest nicht für klassische Lösungen.

Die von uns hier diskutierten Lösungen sind allerdings gerade **nicht** klassisch, sondern haben typischerweise Sprungunstetigkeiten, und zusätzlich können sie erzeugt werden als Grenzwerte von Lösungen parabolischer Probleme bei verschwindender Viskosität.

Die Beobachtung lehrt, daß beim Überqueren eines Schocks Information verlorengeht, also steigt die Entropie (was ungefähr das Entgegengesetzte zur Information ist). Das wollen wir uns jetzt genauer anschauen.

Sei dazu u_δ eine Lösung der Burgers–Gleichung $u_t + uu_x = 0$, wobei $\delta \in [0, 1]$ ein Parameter ist, und u_δ sei gegeben durch

$$0 \leq t \leq \delta : u_\delta(t, x) = \begin{cases} 1 & : x < t - \frac{\delta}{2}, \\ \frac{x - \delta/2}{t - \delta} & : t - \frac{\delta}{2} < x < \frac{\delta}{2}, \\ 0 & : \frac{\delta}{2} < x, \end{cases}$$

$$\delta < t : u_\delta(t, x) = \begin{cases} 1 & : x < \frac{t}{2}, \\ 0 & : x > \frac{t}{2}. \end{cases}$$

Wir beobachten, daß u_δ stetig ist für $t < \delta$, und für $t = \delta$ entsteht ein Schock, der sich dann mit Geschwindigkeit $s = 1/2$ fortpflanzt. Für jedes $\delta \in [0, 1]$ erhalten wir eine schwache Lösung, die auch die Entropiebedingung erfüllt. Alle diese Lösungen sind physikalisch korrekt, und alle stimmen überein auf dem Zeitniveau $t = 1$, und dann auch für alle Zeiten $t > 1$. Zur Zeit $t = 1$ haben wir einen Schock vorliegen, aber mit den dann gegebenen Information können wir nicht ermitteln, wann er eingetreten ist und wo. Das könnten wir, wenn wir die Anfangsdaten u_0 zur Zeit $t = 0$ kennen. In diesem Sinne ist auf dem Weg von $t = 0$ zu $t = 1$ Information verlorengegangen. Die Eindeutigkeit der schwachen Lösungen, welche die Entropiebedingung erfüllen, gilt nur vorwärts, aber nicht rückwärts.

Analytisch zeigt sich dies auch darin, daß die Abbildung, die u_0 auf $u(t, \cdot)$ abbildet, eine kompakte Abbildung ist vom $L^\infty(\mathbb{R})$ in den $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, also kann deren Umkehrabbildung nicht stetig sein.

3.8 Das Riemann–Problem für Systeme von Erhaltungsgleichungen

Das Riemann–Problem lautet

$$\begin{cases} U_t + \partial_x F(U) = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ U(0, x) = U_0(x) = \begin{cases} U_l & : x < 0, \\ U_r & : x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (3.8)$$

wobei U in den \mathbb{R}^n abbildet, und $U_l \neq U_r$ sind konstante Werte aus dem \mathbb{R}^n .

Im Falle von $n = 1$ liegt bekanntlich eine Schockwelle oder eine Verdünnungswelle vor, abhängig davon, ob $u_l > u_r$ oder nicht, und auch abhängig davon, ob $f'' > 0$ oder $f'' < 0$.

Jetzt betrachten wir das p –System der Gasdynamik. Das isentropische (konstante Entropie) System der Gasdynamik, in Lagrange–Koordinaten, lautet

$$v_t - u_x = 0, \quad u_t + \left(\frac{K}{v^\gamma} \right)_x = 0,$$

was die Gleichungen der Massenerhaltung und der Impulserhaltung sind. Hierbei ist $v = 1/\rho$ das spezifische Volumen, und es ist $K > 0$ sowie $\gamma \geq 1$ die adiabatische Gaskonstante. Meist ist $1 < \gamma < 3$.

Allgemeiner schreiben wir

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0, \\ u_t + (p(v))_x = 0, \end{cases} \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad (3.9)$$

wobei $p' < 0$ und $p'' > 0$, ein Beispiel dafür ist $p(v) = Kv^{-\gamma}$. Wir setzen $U = (v, u)^\top$ und $F(U) = (-u, p(v))^\top$ und erhalten dann (3.8). Die Jacobi–Matrix ist dann

$$F' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p'(v) & 0 \end{pmatrix}$$

mit den reellen und verschiedenen Eigenwerten

$$\lambda_1 := -\sqrt{-p'(v)} < 0 < +\sqrt{-p'(v)} =: \lambda_2,$$

also ist das System hyperbolisch. Nun nehmen wir Anfangsdaten

$$U(0, x) = U_0(x) = \begin{cases} U_l = (v_l, u_l)^\top & : x < 0, \\ U_r = (v_r, u_r)^\top & : x > 0, \end{cases}$$

was man physikalisch so interpretieren könnte, daß zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Membran aus einem zweigeteilten Tunnel herausgezogen wird.

Wir wiederholen, daß ein 1-Schock gegeben wird durch die Ungleichungen

$$s < \lambda_1(U_l), \quad \lambda_1(U_r) < s < \lambda_2(U_r),$$

und ein 2-Schock genügt den Bedingungen

$$\lambda_1(U_l) < s < \lambda_2(U_l), \quad \lambda_s(U_r) < s.$$

Wegen $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ folgt dann $s < 0$ für 1-Schocks (auch back-shocks genannt) und $s > 0$ für 2-Schocks (sogenannte front-shocks).

Für back-shocks gilt

$$-\sqrt{-p'(v_r)} < s < -\sqrt{-p'(v_l)},$$

während für front-shocks die folgende Bedingung gültig ist:

$$\sqrt{-p'(v_r)} < s < \sqrt{-p'(v_l)}.$$

Nun wollen wir untersuchen, ob wir den Zustand U_l mit dem Zustand U_r durch einen einzigen Schock verbinden können. Welche Einschränkungen ergeben sich dann für U_r ? Die Antwort liefert uns die Rankine–Hugoniot–Sprungbedingung

$$s(v - v_l) = -(u - u_l), \quad s(u - u_l) = p(v) - p(v_l),$$

wobei v und u sich auf die Werte rechts vom Schock beziehen sollen.

Fall 1: back-shock Gegeben sind v_l und u_l , und wir suchen alle zulässigen (v, u) , sodaß diese Werte auf der rechten Gebietshälfte eingesetzt eine back-shock an der Grenzfläche zwischen beiden Gebietshälften ergeben.

Die Rankine–Hugoniot–Sprungbedingung nach s umgestellt, und in die andere Gleichung eingesetzt, erhalten wir

$$u - u_l = \pm \sqrt{(v - v_l)(p(v_l) - p(v))}.$$

Es stellt sich die Frage nach dem korrekten Vorzeichen.

3.9 Das Glimm–Schema

Kapitel 4

Reaktions–Diffusionsgleichungen

4.1 Allgemeines

Ab jetzt sei X ein Banachraum mit Norm $\|\cdot\|_X$ und $\dim X = \infty$. Wir betrachten eine Funktion

$$\begin{aligned} u: \mathbb{R} &\rightarrow X, \\ u: t &\mapsto u(t), \end{aligned}$$

die Lösung einer Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) = f(u(t))$$

sein soll. Hierbei ist $f: X \rightarrow X$ eine Abbildung, die eventuell nichtlinear sein kann. Es hat sich herausgestellt, daß häufig diese Abbildung nicht sinnvoll auf dem ganzen Raum X definiert werden kann, sondern nur auf einem Teil von X . Wir haben also

$$f: D(f) \rightarrow X.$$

Über die Stetigkeit von f wird zunächst nichts behauptet.

Die Ableitung $\dot{u}(t)$ ist zu verstehen als

$$\dot{u}(t) := \lim_{\mathbb{R} \ni h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (u(t+h) - u(t)),$$

mit Konvergenz in der Norm $\|\cdot\|_X$. Wenn diese Ableitung in einem Punkt $t_0 \in \mathbb{R}$ existiert, dann ist u im Punkt t_0 stetig.

Als Beispiel betrachten wir $u = u(t, x)$ mit $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Also ist $u(t)$ eine Funktion, die noch von einer Variablen x abhängt. Die Funktion u soll Lösung sein zur Transportgleichung

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = c \partial_x u(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine gegebene Konstante ist. Damit haben wir also $f(u) = c \partial_x u$. Wir wissen, daß unter geeigneten Voraussetzungen an u_0 (z.B. reicht es, zu verlangen, daß u_0 stetig differenzierbar ist) die eindeutig bestimmte klassische Lösung gegeben wird durch

$$u(t, x) = u_0(x + ct), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Die Frage ist nun, was wir als Zustandsraum X wählen wollen? Wir beabsichtigen, auch Funktionen u zuzulassen, die für $|x| \rightarrow \infty$ nicht abklingen, was die meisten Lebesgue- und Sobolevräume ausschließt.

Ein erster Versuch der Wahl von X ist

$$X = C_b^0(\mathbb{R}) := \left\{ w = w(x): w \text{ stetig auf } \mathbb{R}, \sup_{x \in \mathbb{R}} |w(x)| < \infty \right\}$$

mit Norm $\|w\|_X = \sup_{x \in \mathbb{R}} |w(x)|$. Der Subskript „b“ steht für „beschränkt“.

Der Definitionsbereich von f wäre dann

$$D(f) = C_b^1(\mathbb{R}) := \left\{ w = w(x) : w \text{ stetig differenzierbar auf } \mathbb{R}, \sup_{x \in \mathbb{R}} (|w(x)| + |w'(x)|) < \infty \right\}.$$

Nun stellen wir aber fest, daß dies eine schlechte Wahl für X ist. Denn für $u_0 = u_0(x) = \sin(x^2)$ haben wir zwar $u_0 \in X$, aber andererseits ist

$$\|u(t) - u_0\|_X = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x) - u_0(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_0(x + ct) - u_0(x)| = 2,$$

und zwar egal, wie nahe t an 0 gewählt wird. Allgemeiner gilt: egal wie nahe zwei Zeiten t_1 und t_2 beieinander gewählt werden, stets ist $\|u(t_1) - u(t_2)\|_X = 2$. Der Orbit ist in diesem Raum X also komplett unzusammenhängend.

Es gibt mehrere Auswege aus dieser verfahrenen Situation. Wir könnten verlangen, daß u_0 nicht nur zu X gehört, sondern zu $D(f)$. Das wollen wir hier nicht tun, weil $D(f)$ „zu weit“ vom Raum X entfernt liegt, der uns eigentlich interessiert.

Stattdessen modifizieren wir die Wahl von X ein klein wenig:

$$X = C_{b,glm}^0(\mathbb{R}) := \left\{ w = w(x) : w \text{ gleichmäßig stetig auf } \mathbb{R}, \sup_{x \in \mathbb{R}} |w(x)| < \infty \right\}$$

mit Norm $\|w\|_X = \sup_{x \in \mathbb{R}} |w(x)|$.

Und diese Wahl kommt unseren Wünschen deutlich näher, denn es gilt:

Lemma 4.1. *Sei $u_0 \in X = C_{b,glm}^0$ und sei $u = u(t, x) := u_0(x + ct)$. Dann ist die Abbildung $t \mapsto u(t, \cdot)$ gleichmäßig stetig als Abbildung von \mathbb{R} nach X .*

Beweis. Wir wollen zeigen: zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, sodaß gilt: wenn $|t_1 - t_2| < \delta$, dann ist $\|u(t_1) - u(t_2)\|_X < \varepsilon$. Nun ist aber

$$\|u(t_1) - u(t_2)\|_X = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_0(x + ct_1) - u_0(x + ct_2)| = \sup_{y \in \mathbb{R}} |u_0(y + c(t_1 - t_2)) - u_0(y)|,$$

und hier brauchen wir nur noch die Definition der gleichmäßigen Stetigkeit auf u_0 anzuwenden. □

Diejenige Abbildung, die $u_0(\cdot)$ auf $u(t, \cdot)$ abbildet, nennen wir $T(t)$:

$$(T(t)u_0)(x) := u_0(x + ct), \quad t \geq 0.$$

Insgesamt haben wir dann $T(t) \circ T(s) = T(t + s)$ und $T(0) = \text{id}_X$ (die identische Abbildung). Und außerdem gilt $\lim_{t \rightarrow +0} T(t)u_0 = u_0$ mit Konvergenz im Sinne der Norm $\|\cdot\|_X$.

Dieses Konzept brauchen wir noch öfter:

Definition 4.2 (C_0 -Halbgruppe). *Eine Familie $(T(t))_{t \geq 0}$ heißt C_0 -Halbgruppe auf einem Banachraum X , wenn folgendes gilt:*

- für jedes $t \geq 0$ ist $T(t)$ ein lineare und stetige Abbildung von X nach X ,
- es ist $T(t) \circ T(s) = T(t + s)$ für alle $t, s \geq 0$,
- es ist $T(0) = \text{id}_X$,
- die Familie ist stark stetig im Sinne von $\lim_{t \rightarrow +0} T(t)x = x$ für jedes $x \in X$, mit Konvergenz gemessen in $\|\cdot\|_X$.

Eine solche Halbgruppe heißt auch stark stetige Halbgruppe.

In unserem konkreten Beispiel könnten wir auch negative t zulassen und die genannten Relationen würden immer noch gelten. Dann würden wir sogar von einer C_0 -Gruppe sprechen, nicht nur von einer Halbgruppe.

Ein typisches Beispiel einer Halbgruppe wird gegeben durch $T(t) = \exp(At)$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix ist. Dann ist T genau die Fundamentallösung des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems $\frac{d}{dt} - A$.

Diesen Gedanken wollen wir jetzt auf den unendlichdimensionalen Fall verallgemeinern.

Definition 4.3. Sei $(T(t))_{t \geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf dem Banachraum X . Ein Operator A , definiert durch

$$Au := \lim_{t \rightarrow +0} \frac{T(t)u - u}{t},$$

(mit Konvergenz gemessen in $\|\cdot\|_X$) heißt infinitesimaler Erzeuger (bzw. Generator) von T . Der Definitionsbereich $D(A)$ besteht aus allen $u \in X$, für die der obige Limes existiert.

Im Fall mit $T(t)u_0 = u_0(\cdot + ct)$ bekommen wir gerade

$$(Au_0)(x) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{u_0(x + ct) - u_0(x)}{t} = c \partial_x u_0(x),$$

falls der Limes existiert.

Wir bestimmen jetzt $D(A)$. Um uninteressante Dinge auszuschließen, verbieten wir jetzt den Fall $c = 0$. Zunächst muß eine Funktion $u_0 \in D(A)$ differenzierbar sein im klassischen Sinne, also $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$. Tatsächlich gilt sogar:

$$D(A) = C_{b,glm}^1(\mathbb{R}) = \left\{ w : w \text{ stetig diffbar auf } \mathbb{R}, \text{ und } w' \text{ glm. stetig, } \sup_{x \in \mathbb{R}} (|w(x)| + |w'(x)|) < \infty \right\}$$

mit Norm $\|w\|_{D(A)} = \sup_{x \in \mathbb{R}} (|w(x)| + |w'(x)|)$.

Denn: sei $u_0 \in D(A)$. Dann ist Au_0 der Grenzwert von Brüchen $\frac{1}{t}(T(t)u_0 - u_0)$ mit Konvergenz in X . Nun liegt jeder Bruch in X , und X ist ein Banachraum, also muß der Limes Au_0 auch in X liegen, also ist $\partial_x u_0$ gleichmäßig stetig auf \mathbb{R} und auf \mathbb{R} beschränkt.

Wir haben noch nicht gezeigt, daß X ein Banachraum ist. Zunächst ist X ein Vektorraum, sogar ein normierter Vektorraum. Sei nun (w_1, w_2, \dots) eine Cauchyfolge in X . Allerdings ist X ein linearer Unterraum von $C_b^0(\mathbb{R})$, und dies ist ein Banachraum (und zwar mit derselben Norm wie X). Also existiert ein Grenzelement $w^* \in C_b^0(\mathbb{R})$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - w^*\|_X = 0$. Wenn wir gezeigt haben, daß w^* **gleichmäßig** stetig ist, dann sind wir fertig. Jetzt ist

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - w^*\|_X = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |w_n(x) - w^*(x)|.$$

Für $\varepsilon > 0$ existiert also ein $N_0(\varepsilon) > 0$, sodaß für jedes n mit $n > N_0(\varepsilon)$ und jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|w_n(x) - w^*(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wir wählen ein solches n . Seien x_1 und $x_2 \in \mathbb{R}$ irgendwie gewählt. Dann ist

$$|w^*(x_1) - w^*(x_2)| \leq |w^*(x_1) - w_n(x_1)| + |w_n(x_1) - w_n(x_2)| + |w_n(x_2) - w^*(x_2)|.$$

Wir wissen bereits, daß der erste Summand und der dritte auf der rechten Seite kleiner sind als $\varepsilon/3$. Nun ist aber w_n eine gleichmäßig stetige Funktion. Also finden wir ein $\delta > 0$, sodaß für $|x_1 - x_2| < \delta$ gilt, daß der mittlere Summand kleiner ist als $\varepsilon/3$. Dann haben wir insgesamt

$$|w^*(x_1) - w^*(x_2)| < \varepsilon,$$

falls $|x_1 - x_2| < \delta$. Also ist w^* gleichmäßig stetig. Also ist X ein Banachraum.

Für den allgemeinen Fall kann insgesamt folgendes bewiesen werden:

Lemma 4.4. *Der Generator A einer stark stetigen Halbgruppe $(T(t))_{t \geq 0}$ hat folgende Eigenschaften:*

- $D(A)$ ist ein linearer Unterraum von X ,
- A bildet linear und stetig ab von $D(A)$ nach X ,
- wenn $u_0 \in D(A)$, dann ist auch $T(t)u_0 \in D(A)$, und es ist

$$\frac{d}{dt}T(t)u_0 = T(t)Au_0 = AT(t)u_0, \quad t \geq 0.$$

- Wenn $t \geq 0$ und $u_0 \in X$, dann ist $\int_{s=0}^t T(s)u_0 ds \in D(A)$.
- Wenn $t \geq 0$ und $u_0 \in X$, dann ist $T(t)u_0 - u_0 = A \int_{s=0}^t T(s)u_0 ds$.
- Wenn $t \geq 0$ und $u_0 \in D(A)$, dann ist $T(t)u_0 - u_0 = \int_{s=0}^t T(s)Au_0 ds$.

Beweis. Siehe z.B. [2]. □

Weitere Eigenschaften sind:

Satz 4.5. *Der Definitionsbereich $D(A)$ ist dicht in X . Der Operator A bestimmt die Halbgruppe $(T(t))_{t \geq 0}$ eindeutig. Das heißt: wenn zwei Halbgruppen $(T(t))_{t \geq 0}$ und $(S(t))_{t \geq 0}$ denselben Generator haben, dann ist $T(t) = S(t)$ für jedes $t \geq 0$.*

Beweis. Siehe z.B. [2]. □

Die Dichtheit bedeutet, daß jedes Element aus X durch Elemente aus $D(A)$ beliebig gut angenähert werden kann, wobei man den Abstand mit der Norm $\|\cdot\|_X$ mißt.

4.2 Diffusionsgleichungen

Das Anfangswertproblem zur Diffusionsgleichung wird gegeben durch

$$\begin{cases} u_t(t, x) = \partial_x^2 u(t, x), & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

Mittels Fouriertransformation kann man sich eine Lösungsformel verschaffen, und man kommt auf

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{y=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) u_0(y) dy, \quad t > 0.$$

Diese Formel ergibt z.B. dann die eindeutig bestimmte Lösung, wenn u_0 stetig und beschränkt ist auf \mathbb{R} . Wir definieren

$$K(t, z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4t}\right), \quad (t, z) \in (0, \infty) \times \mathbb{R},$$

und können dann schreiben

$$u(t, x) = (K(t, \cdot) * u_0)(x),$$

wobei das Faltungsintegral sich erstreckt über \mathbb{R}_y . Es ist bekannt, daß $K(t, \cdot)$ im $L^1(\mathbb{R}_x)$ die Norm 1 hat, und damit haben wir nach bekannten Rechenregeln für die Faltung

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}_x)} &\leq \|K(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}_x)} \cdot \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}_x)} \leq \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}_x)}, \\ \|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x)} &\leq \|K(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}_x)} \cdot \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x)}. \end{aligned}$$

Wir haben weiterhin die Abklingabschätzung

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x)} \leq \|K(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x)} \cdot \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}_x)} \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}_x)}.$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft ist die *Glättung*. Das bedeutet, daß u für positive Zeiten beliebig oft differenzierbar wird, auch wenn u_0 noch nicht einmal stetig ist, sondern lediglich beschränkt.

Zur Verifikation:

$$\begin{aligned} \partial_x u(t, x) &= \int_{y=-\infty}^{\infty} (\partial_x K(t, x-y)) u_0(y) dy, \\ \sup_{x \in \mathbb{R}} |\partial_x u(t, x)| &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left| \int_{y=-\infty}^{\infty} -\frac{2(x-y)}{4t} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) u_0(y) dy \right| \quad \left(s = \frac{x-y}{2\sqrt{t}} \right) \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left| \int_{s=-\infty}^{\infty} \frac{-2s}{2\sqrt{t}} \exp(-s^2) u_0(x+2\sqrt{t}s) ds \right| \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \left(\int_{s=-\infty}^{\infty} |s| \exp(-s^2) ds \right) \sup_{z \in \mathbb{R}} |u_0(z)| \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{t}} \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_0(x)|. \end{aligned}$$

Allgemeiner kann man nach einem ähnlichen Schema zeigen, daß:

$$\forall n \geq 0 \quad \exists C_n : \|\partial_x^n u(t, \cdot)\|_{C_b^0(\mathbb{R}_x)} \leq C_n t^{-n/2} \|u_0\|_{C_b^0(\mathbb{R}_x)}.$$

Um die Halbgruppentheorie anzuwenden, wählen wir den Zustandsraum

$$X = C_{b,glm}^0(\mathbb{R})$$

und den Operator $A = \partial_x^2$ mit Definitionsbereich $D(A) = C_{b,glm}^2(\mathbb{R})$. Dieser umfaßt alle Funktionen, die beschränkt und stetig sind, mit beschränkten und stetigen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung, und die zweite Ableitung ist sogar gleichmäßig stetig. Die Norm ist $\|w\|_{D(A)} = \sup_{x \in \mathbb{R}} (|w(x)| + |w'(x)| + |w''(x)|)$.

Wir führen dann eine Familie $(T(t))_{t \geq 0}$ von Abbildungen ein durch

$$(T(t)u_0)(x) = \begin{cases} (K(t, \cdot) * u_0)(x) & : t > 0, \\ u_0(x) & : t = 0. \end{cases}$$

Dies ist unser Wunschkandidat für eine C_0 -Halbgruppe. Ob dieser tatsächlich die Bedingungen aus Definition 4.2 erfüllt, muß erst noch gezeigt werden.

Die erste Bedingung ist mittels unserer obigen Abschätzungen sofort gezeigt. Die zweite Bedingung folgt aus der Assoziativität der Faltung

$$(T(t) \circ T(s))u_0 = T(t)(T(s)u_0) = K(t, \cdot) * (K(s, \cdot) * u_0) = (K(t, \cdot) * K(s, \cdot)) * u_0.$$

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß $K(t, \cdot) * K(s, \cdot) = K(t+s, \cdot)$. Das erledigt man durch Ausrechnen, zum Beispiel mittels Fouriertransformation.

Bleibt noch die starke Stetigkeit.

Satz 4.6. Falls $u_0 \in X$, dann ist $\lim_{t \rightarrow +0} u(t, \cdot) = u_0(\cdot)$ mit Konvergenz in der Norm von X .

Beweis. Wir schreiben $G(z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp(-z^2/4)$; das G steht für Gauß und seine Glockenfunktion. Dann

haben wir

$$\begin{aligned}
\|u(t, \cdot) - u_0\|_X &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x) - u_0(x)| \\
&= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_{y=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} G\left(\frac{x-y}{\sqrt{t}}\right) (u_0(y) - u_0(x)) \, dx \right| \\
&= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_{z=-\infty}^{\infty} G(z) (u_0(x + \sqrt{t}z) - u_0(x)) \, dz \right| \\
&\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{|z| \leq M} G(z) |u_0(x + \sqrt{t}z) - u_0(x)| \, dz \\
&\quad + \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{|z| \geq M} G(z) |u_0(x + \sqrt{t}z) - u_0(x)| \, dz
\end{aligned}$$

Hierbei können wir M noch frei wählen.

Sei ein positives ε gegeben. Wenn wir M groß genug wählen, dann können wir erreichen, daß

$$\left| \int_{|z| \geq M} \dots \, dz \right| \leq 2 \|u_0\|_{C_b^0(\mathbb{R})} \int_{|z| \geq M} G(z) \, dz \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nachdem M fixiert ist, wählen wir anschließend eine positive Schranke t_0 , sodaß für $0 < t \leq t_0$ gilt:

$$|u_0(x + \sqrt{t}z) - u_0(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad |z| \leq M.$$

Das ist möglich, weil u_0 *gleichmäßig* stetig ist, anstatt von lediglich einfacher Stetigkeit.

Dann gilt für $0 < t \leq t_0$ die gewünschte Ungleichung $\|u(t, \cdot) - u_0\|_X \leq \varepsilon$. □

4.3 Dispersion

Dispersion ist ein Phänomen bei der Wellenausbreitung und bedeutet, daß die Phasengeschwindigkeit einer Welle abhängig ist von der Wellenlänge dieser Welle. Als Konsequenz sind dann Gruppen- und Phasengeschwindigkeit verschieden.

Als Differentialgleichung wählen wir die Schrödingergleichung in der Form von

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = -i \partial_x^2 u(t, x), & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Zur Lösung verwenden wir die Fouriertransformation:

$$\hat{u}(t, \xi) := \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} u(t, x) \, dx.$$

Dann folgt $\partial_t \hat{u}(t, \xi) = i\xi^2 \hat{u}(t, \xi)$. Diese gewöhnliche Differentialgleichung kann man schnell lösen, und wir bekommen $\hat{u}(t, \xi) = \exp(i\xi^2 t) \hat{u}_0(\xi)$ oder auch

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \exp(i(x\xi + t\xi^2)) \hat{u}_0(\xi) \, d\xi.$$

Insbesondere stellen wir fest, daß es Lösungen der Form

$$u(t, x) = \exp(i(x\xi + t\xi^2))$$

gibt, wobei $\xi \in \mathbb{R}$ fixiert ist. Zum Wellenzahlvektor ξ haben wir also $\omega(\xi) = \xi^2$, und die Phasengeschwindigkeit ist definiert als

$$c_p = \frac{\omega(\xi)}{\xi} = \xi.$$

Offensichtlich hängt c_p von ξ ab, was genau das Phänomen der Dispersion ist. Die Gruppengeschwindigkeit ist

$$c_g = \frac{d\omega(\xi)}{d\xi} = 2\xi.$$

Dies bedeutet: ein Wellenpaket, das sich vorwiegend aus Anteilen mit hohem Wert des Wellenzahlvektors $|\xi|$ zusammensetzt (also eine „hohe Rauigkeit“ hat), bewegt sich deutlich schneller als ein anderes Wellenpaket, dessen Anteile einem niedrigen Wert von $|\xi|$ entsprechen. Solche Wellenpakete mit großen Werten von $|\xi|$ tragen entscheidend dazu bei, daß die Lösung u nur eine geringe Regularität besitzt. Wenn wir uns jetzt für ein beschränktes Gebiet des \mathbb{R}_x interessieren, dann kann folgendes passieren:

- Ein sich dort aufhaltendes Wellenpaket mit „hoher Rauigkeit“ verläßt das interessante Gebiet sehr schnell. Das wäre angenehm, weil die übrigen Bestandteile dann zu einer höheren Regularität von u führen.
- Ein Wellenpaket „hoher Rauigkeit“, das zum Zeitpunkt $t = 0$ sehr weit entfernt ist, kann sich sehr schnell nähern und die ursprünglich in dem interessanten Gebiet vorhandene hohe Regularität von u zerstören. Das wäre unangenehm. Wenn allerdings die Werte der Anfangsfunktion u_0 für $|x| \rightarrow \infty$ „schnell genug“ abklingen, dann wird dieser Effekt begrenzt. Die genauere Bedeutung von „schnell genug“ klären wir weiter unten.

Wenn man in der obigen Lösungsdarstellung noch etwas weiterrechnet und die Variable ξ eliminiert, dann folgt

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi it}} \int_{y=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{i(x-y)^2}{4t}\right) u_0(y) dy, \quad (4.1)$$

also eine Formel mit leichten Ähnlichkeiten zur Lösungsformel der Diffusionsgleichung. Aber auch mit erheblichen Unterschieden: denn bei der Diffusionsgleichung stand im Integranden eine Gauß-Glocke, welche die Konvergenz des Integrals für $|y| \rightarrow \infty$ erheblich erleichtert hatte. Im Prinzip jede praktisch relevante Funktion u_0 führte auf ein konvergentes Integral.

Dies ist bei der Dispersionsgleichung anders, denn der Exponentialterm hat immer den Betrag 1.

Zunächst tragen wir einige einfach zu zeigende Eigenschaften zusammen: Aus der Physik ist unter dem Stichwort *Energieerhaltung* bekannt, daß

$$\partial_t \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}_x)}^2 = 0.$$

Weiterhin haben wir die Abklingabschätzung

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x)| \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \int_{y=-\infty}^{\infty} |u_0(y)| dy.$$

Für Glättungseigenschaften untersuchen wir

$$\partial_x u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi it}} \int_{y=-\infty}^{\infty} \frac{-2i(x-y)}{4t} \exp\left(-\frac{i(x-y)^2}{4t}\right) u_0(y) dy.$$

Daraus folgt: wenn $\int_{y=-\infty}^{\infty} |y| \cdot |u_0(y)| dy < \infty$, dann existiert $\partial_x u(t, x)$. Wir interpretieren das wie folgt: das Abklingen der Anfangsfunktion u_0 für $|y| \rightarrow \infty$ wird eingetauscht für eine bessere Glattheit der Funktion $u(t, \cdot)$ im Falle von $t > 0$.

Wir können diese Argumentation auch wiederholen: wenn $\int_{y=-\infty}^{\infty} |y|^n \cdot |u_0(y)| dy < \infty$, dann ist $u(t, \cdot) \in C_b^n(\mathbb{R}_x)$ für alle $t > 0$. Ein noch besseres Abklingen von u_0 wird also eingetauscht gegen eine noch bessere Regularität von u für $t > 0$.

Aus der Darstellungsformel (4.1) sehen wir, daß für $u_0 \in C_{b,glm}^0(\mathbb{R}_x)$ die Existenz des Integrals gar nicht gesichert ist, weil unklar ist, ob der Integrand für $|y| \rightarrow \infty$ schnell genug abklingt.

Als Ausweg wählen wir für den Zustandsraum $X = L^2(\mathbb{R})$. Dann ist $A = -i\partial_x^2$ mit $D(A) = \{v \in L^2(\mathbb{R}) : v'' \in L^2(\mathbb{R})\}$, was gleich dem Sobolevraum $H^1(\mathbb{R}) = W_2^1(\mathbb{R})$ ist.

Tatsächlich gibt es dann wieder eine C_0 -Halbgruppe.

4.4 Lösungsbegriffe

Sei A der Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe $(T(t))_{t \geq 0}$ auf einem Banachraum X . Wir wollen Lösungen zum Problem

$$\begin{cases} \partial_t u = Au + f(t), & t \in (0, \infty), \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (4.2)$$

untersuchen, wobei u_0 und f gegeben sind. Idealerweise würden wir uns wünschen, daß alle relevanten Terme im herkömmlichen Sinne existieren. Das führt uns auf den Begriff der klassischen Lösung:

Definition 4.7 (Klassische Lösung). *Eine Funktion $u = u(t): [0, \infty) \rightarrow X$ heißt klassische Lösung zum Anfangswertproblem (4.2), wenn*

- $u \in C([0, \infty), X)$,
- $u \in C^1((0, \infty), X)$,
- $u \in C((0, \infty), D(A))$

gilt, und wenn u das obige Problem (4.2) löst, wobei $u_0 \in X$ und $f \in C((0, \infty), X)$.

Die erste Bedingung fordert, daß u stetig mit Werten in X bis zum Punkt $t = 0$ einschließlich ist; was bedeutet, daß die Anfangswertbedingung $u(0) = u_0$ sinnvoll wird. Die zweite und dritte Bedingung fordern, daß $\partial_t u$ sowie Au jeweils Funktionen aus dem $C((0, \infty), X)$ liefern.

Nun hat es sich allerdings herausgestellt, daß diese Forderungen an den Lösungskandidaten u zu hart sind. Häufig gelingt es nicht oder nur unter Mühen, nachzuweisen, daß die vermutete Lösung tatsächlich so glatt ist wie in der Definition gefordert. Aus diesem Grunde führen wir schwächere Lösungsbegriffe ein, wie zum Beispiel das Konzept der *milden Lösung*.

Sei $0 \leq s \leq t$, und sei u eine klassische Lösung. Wir halten t fest und lassen s variabel. Dann setzen wir

$$g(s) := T(t-s)u(s).$$

Wegen $u(s) \in D(A)$ (falls $s > 0$) und $t-s \geq 0$ ist dann auch $g(s) \in D(A)$, und wir haben, (unter der unwichtigen Einschränkung $0 < s < t$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}g(s) &= \left(\frac{d}{ds}T(t-s) \right) u(s) + T(t-s) \frac{d}{ds}u(s) \\ &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)(Au(s) + f(s)) \\ &= -T(t-s)Au(s) + T(t-s)Au(s) + T(t-s)f(s) \\ &= T(t-s)f(s). \end{aligned}$$

Zusätzlich zu $f \in C((0, \infty), X)$ setzen wir jetzt nur $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, X)$ voraus, also

$$\int_{t=0}^{t_*} \|f(t)\|_X dt < \infty, \quad \forall t_* < \infty.$$

Dann ist die Abbildung $s \mapsto T(t-s)f(s)$ integrierbar, und wir können die Ableitung $\partial_s g(s)$ integrieren auf dem Intervall $(0, t)$:

$$\begin{aligned} g(t) - g(0) &= \int_{s=0}^t T(t-s)f(s) ds, \\ g(t) &= T(t-t)u(t) = u(t), \\ g(0) &= T(t)u(0) = T(t)u_0, \end{aligned}$$

also ergibt sich insgesamt die Darstellung

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_{s=0}^t T(t-s)f(s) ds.$$

Das bedeutet insbesondere, daß es nur eine einzige klassische Lösung geben kann.

Bemerkung 4.8. Im Falle von $X = \mathbb{R}^n$ ist A eine Matrix aus dem $\mathbb{R}^{n \times n}$, und dann wird die Lösung $u = u(t)$ zum Anfangswertproblem (4.2) gerade gegeben durch

$$u(t) = e^{At}u_0 + \int_{s=0}^t e^{A(t-s)}f(s) \, ds,$$

womit die obige Lösungsdarstellung ganz natürlich erscheint.

Definition 4.9 (Milde Lösung). Sei A der Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe $(T(t))_{t \geq 0}$, und sei $u_0 \in X$ sowie $f \in L^1_{\text{loc}}((0, \infty), X)$. Dann heißt die Funktion $u = u(t)$ mit $u \in C([0, \infty), X)$ sowie

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_{s=0}^t T(t-s)f(s) \, ds, \quad t \in (0, \infty),$$

milde Lösung zum Problem (4.2).

Wir haben bereits gezeigt, daß jede klassische Lösung eine milde Lösung ist, wenn $f \in L^1_{\text{loc}}((0, \infty), X)$. Die Umkehrung gilt, wenn man die Voraussetzungen an f und u_0 deutlich verschärft, zum Beispiel zu $f \in C^1([0, \infty), X)$ und $u_0 \in D(A)$.

Bemerkung 4.10. Die Begriffe der klassischen bzw. milden Lösung lassen sich natürlich auch für ein beschränktes Zeitintervall $(0, T_0)$ anstelle des Zeitintervalles $(0, \infty)$ definieren.

4.5 Die KPP-Gleichung

Die Abkürzung KPP steht für die Namen KOLMOGOROV, PETROVSKY, PISKUNOV, aber die Gleichung ist auch unter der Bezeichnung FISHER-Gleichung bekannt. Es geht um das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = \partial_x^2 u(t, x) + u(t, x) - (u(t, x))^2, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Hierbei ist u eine reellwertige Funktion, die eine Konzentration eines chemischen Stoffes oder einer Spezies bezeichnet. Negative Werte von u wären also inhaltlich unsinnig.

Angenommen, u wäre unabhängig von x , also $u(t, x) = v(t)$ für alle (t, x) , dann hätten wir $\dot{v}(t) = v - v^2$, was genau die Gleichung für das logistische Wachstum ist. Wir wissen bereits, daß diese Gleichung zwei stationäre Punkte besitzt, wobei $v = 1$ asymptotisch stabil ist, und $v = 0$ instabil.

Wenn wir nun zu der Gleichung des logistischen Wachstums noch einen Diffusionsterm hinzufügen, dann bekommen wir die KPP-Gleichung. Als Zustandsraum wählen wir, genau wie bei der Diffusionsgleichung,

$$X = C^0_{b,glm}(\mathbb{R}).$$

Wir setzen $A = \partial_x^2$ mit $D(A) = C^2_{b,glm}(\mathbb{R})$; und wir führen den Nichtlinearitätsterm $N(u) = u - u^2$ ein. Offensichtlich bildet N den Raum X in sich ab. Dann haben wir die abstrakte Formulierung

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = Au + N(u), & t \in (0, \infty), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Satz 4.11. Sei $u_0 \in X$. Dann existiert genau eine milde lokale Lösung. Das heißt: es gibt ein $T_0 > 0$, sodaß genau eine Funktion $u \in C([0, T_0), X)$ existiert, die eine milde Lösung zu (4.3) ist.

Beweis. Wir gehen analog zum Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf vor und verwenden den Banach-Fixpunktsatz im Banachraum X_{T_0} , wobei

$$X_{T_0} = C^0([0, T_0], X).$$

Hierbei ist T_0 passend gewählt. Die Norm ist gegeben durch $\|f\|_{X, T_0} = \sup_{[0, T_0]} \|f(t)\|_X$.

Die milde Lösung (wenn es sie gibt) erfüllt, per definitionem, die Gleichung

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_{s=0}^t T(t-s)(N(u))(s) \, ds, \quad 0 < t \leq T_0,$$

wobei $(T(t))_{t \geq 0}$ die Halbgruppe zum Erzeuger A ist.

Im Banachraum X_{T_0} wählen wir eine abgeschlossene Menge M ,

$$M = \left\{ u \in C^0([0, T_0], X) : \|u\|_{X, T_0} \leq C_1 \right\}, \quad C_1 := 2 \|u_0\|_X.$$

Nun kann man schnell zeigen, daß

$$\begin{aligned} \|T(t)u_0\|_X &\leq \|u_0\|_X, \quad 0 \leq t < \infty, \\ \|N(u)\|_X &\leq \|u\|_X + \|u\|_X^2, \end{aligned}$$

und somit haben wir, für $u, v \in M$, die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|N(u)\|_{X, T_0} &\leq C_1 + C_1^2, \\ \|N(u) - N(v)\|_{X, T_0} &\leq \|u - v\|_{X, T_0} + \|(u+v)(u-v)\|_{X, T_0} \leq (1 + 2C_1) \|u - v\|_{X, T_0}. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun eine Abbildung $u \mapsto \mathcal{L}(u)$ mit

$$(\mathcal{L}(u))(t) := T(t)u_0 + \int_{s=0}^t T(t-s)(N(u))(s) \, ds, \quad 0 \leq t \leq T_0.$$

Die Konstante T_0 wählen wir so klein, daß $(1 + C_1)T_0 \leq \frac{1}{2}$ gilt.

\mathcal{L} bildet M in sich ab: das folgt aus der folgenden Ungleichungskette, wenn $(1 + C_1)T_0 \leq \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} &\sup_{[0, T_0]} \left\| T(t)u_0 + \int_{s=0}^t T(t-s)(N(u))(s) \, ds \right\|_X \\ &\leq \sup_{[0, T_0]} \|T(t)u_0\|_X + \sup_{[0, T_0]} \int_{s=0}^t \|T(t-s)(N(u))(s)\|_X \, ds \\ &\leq \|u_0\|_X + \sup_{[0, T_0]} \int_{s=0}^t \|(N(u))(s)\|_X \, ds \\ &\leq \|u_0\|_X + T_0(C_1 + C_1^2) \\ &\leq C_1, \end{aligned}$$

denn es ist $\|u_0\|_X = \frac{1}{2}C_1$.

\mathcal{L} kontrahiert auf M : unter der üblichen Voraussetzung an T_0 ist nämlich

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(u) - \mathcal{L}(v)\|_{X, T_0} &= \sup_{[0, T_0]} \left\| \int_{s=0}^t T(t-s)((N(u) - N(v))(s)) \, ds \right\|_X \\ &\leq \sup_{[0, T_0]} \int_{s=0}^t \|T(t-s)((N(u) - N(v))(s))\|_X \, ds \\ &\leq \sup_{[0, T_0]} \int_{s=0}^t \|(N(u) - N(v))(s)\|_X \, ds \\ &\leq T_0 \|N(u) - N(v)\|_{X, T_0} \\ &\leq T_0(1 + 2C_1) \|u - v\|_{X, T_0} \\ &\leq \frac{1}{2} \|u - v\|_{X, T_0}. \end{aligned}$$

Dann können wir den Fixpunktsatz von Banach anwenden und bekommen eine eindeutig bestimmte milde Lösung auf einem kleinen Zeitintervall $[0, T_0]$. \square

Nachdem man die Existenz einer milden Lösung gesichert hat, zeigt man in einem zweiten Schritt, daß diese milde Lösung sogar eine klassische Lösung ist, wenn $u_0 \in D(A)$. Hierbei benutzt man wesentlich, daß die Halbgruppe zum Diffusionsoperator nicht nur stark stetig ist, sondern sogar eine sogenannte *analytische Halbgruppe* ist. Für die Einzelheiten eines solchen Beweises verweisen wir auf die Vorlesung zu Halbgruppen.

Es wird sich herausstellen, daß diese Lösung (im einzig relevanten Fall von nichtnegativen Anfangsdaten) sogar global existiert, wegen des Maximumprinzips:

Lemma 4.12 (Maximumprinzip). *Es seien u_1 und u_2 zwei klassische Lösungen auf $[0, t_*] \times \mathbb{R}$ mit $u_1(t_0, x) < u_2(t_0, x)$ für ein gewisses $t_0 \in (0, t_*)$ und sämtliche $x \in \mathbb{R}$.*

Dann ist $u_1(t, x) < u_2(t, x)$ für alle $(t, x) \in (t_0, t_] \times \mathbb{R}$.*

Beweisskizze. Wir wissen, daß u_1 und u_2 stetige Funktionen von (t, x) sind. Wir nehmen für einen indirekten Beweis an, daß $u_1(t_1, x_0) = u_2(t_1, x_0)$ für ein $(t_1, x_0) \in (t_0, t_*) \times \mathbb{R}$. Wir können annehmen, daß $(u_2 - u_1)(t_1, \cdot)$ in x_0 ein Minimum hat. Dann folgt $\partial_x^2(u_2 - u_1)(t_1, x_0) \geq 0$ bzw. > 0 im „nicht-entarteten Fall“.

Wir haben dann

$$\begin{aligned} \partial_t(u_2(t_1, x_0) - u_1(t_1, x_0)) &= \partial_x^2(u_2(t_1, x_0) - u_1(t_1, x_0)) + (u_2(t_1, x_0) - u_1(t_1, x_0)) \\ &\quad - (u_2^2(t_1, x_0) - u_1^2(t_1, x_0)) \\ &= \partial_x^2(u_2(t_1, x_0) - u_1(t_1, x_0)) + 0 - 0. \end{aligned}$$

Im „nicht-entarteten Fall“ ist dann $\partial_t(u_2(t_1, x_0) - u_1(t_1, x_0)) > 0$, und somit ist „im nächsten Moment“ wieder $u_2(t, x_0) > u_1(t, x_0)$, bzw. es war „kurz zuvor“ sogar $u_2(t, x_0) < u_1(t, x_0)$. Dann könnte man t_1 kleiner wählen und so einen Widerspruch anstreben.

Offen bleibt noch die Diskussion des „entarteten Falles“ $\partial_x^2(u_2(t_1, x_0) - u_1(t_1, x_0)) = 0$. □

Daraus folgt dann die globale Existenz klassischer Lösungen.

Satz 4.13. *Sei u eine klassische Lösung zu (4.3) auf der Menge $(0, T_0) \times \mathbb{R}$ mit $u_0 \in D(A)$ und $u_0(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $\sup_{[0, T_0] \times \mathbb{R}} |u(t, x)| < \infty$. Insbesondere kann man dann die Lösung auf ein größeres Gebiet $[0, T_0 + \varepsilon] \times \mathbb{R}$ fortsetzen.*

Beweis. Wir wählen $0 < \gamma \ll 1$ und setzen $M_+ = \sup_{x \in \mathbb{R}} u_0(x) + \gamma$ sowie $M_- = -\gamma$. Sei $u_+ = u_+(t, x)$ die Lösung zu (4.3) mit Anfangswerten M_+ , und sei $u_- = u_-(t, x)$ die Lösung zu (4.3) mit Anfangswerten M_- .

Wegen der Eindeutigkeit milder Lösungen hängen u_+ und u_- nicht von x ab, denn ihre Anfangswerte sind unabhängig von x . Dann ist

$$\begin{aligned} \partial_t u_+ &= u_+ - u_+^2, & u_+(0) &= M_+, \\ \partial_t u_- &= u_- - u_-^2, & u_-(0) &= M_-, \end{aligned}$$

und wir können u_+ und u_- explizit berechnen. Wir stellen fest, daß u_+ für alle positiven Zeiten existiert, und daß die Lebensdauer von u_- beliebig groß gemacht werden kann, wenn man nur γ genügend klein wählt. Weiterhin ist $u_-(t) < u(t, x) < u_+(t)$ für $0 \leq t \leq T_0$. Also kann u nicht in endlicher Zeit explodieren, und u kann auch nicht negativ werden. □

Das Maximumprinzip ist auch als Vergleichsprinzip oder Monotonieprinzip bekannt und hat eine Reihe von Anwendungen.

Lemma 4.14. *Der Fixpunkt $u^* \equiv 0$ ist instabil im Raum X .*

Beweis. Wir nehmen Anfangsdaten $u_0 = u_0(x) \equiv \delta$ für ein δ mit $0 < \delta \ll 1$. Die Lösung $u = u(t, x)$ zu diesen Anfangswerten ist unabhängig von x und strebt nach 1, entfernt sich also von u^* . □

Lemma 4.15. *Der Fixpunkt $u^* \equiv 1$ ist asymptotisch stabil in X .*

Beweis. Seien Anfangsdaten u_0 gegeben mit $\|u_0 - u^*\|_X = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_0(x) - 1| < \delta$. Wir wollen zeigen, daß $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, \cdot) - u^*\|_X = 0$, wünschenswerterweise mit einer nachgewiesenen Mindestgeschwindigkeit für die Konvergenz. Dazu nehmen wir Anfangswerte

$$u_{0,+} = u_{0,+}(x) \equiv 1 + 2\delta, \quad u_{0,-} = u_{0,-}(x) \equiv 1 - 2\delta, \quad x \in \mathbb{R}$$

und nennen die dazugehörigen Lösungen u_+ und u_- . Dann haben wir $u_-(t, x) < u(t, x) < u_+(t, x)$ für alle $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$, wegen des Vergleichsprinzips. Nun sind aber u_+ und u_- unabhängig von x , also Lösungen der bereits untersuchten logistischen Gleichung, von der wir bereits wissen, daß der Fixpunkt 1 asymptotisch stabil ist. \square

Wir können das Vergleichsprinzip auch benutzen, um die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Lösungen zu Anfangsdaten mit kompaktem Träger zu untersuchen: Dazu sei u_0 eine Anfangsfunktion mit $0 \leq u_0(x) < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und sei $u_0(x) = 0$ für $|x| > R$. Man kann zeigen, daß es Lösungen $u = u(t, x)$ in Form wandernder Wellen gibt mit $u(t, x) = v(x - ct)$, wobei $|c| \geq 2$. Je nach Vorzeichen von c läuft diese wandernde Welle nach links oder rechts. Wir wählen $c = 2$ und finden zwei Wellenprofile v_- und v_+ mit

$$u_0(x) < v_-(x), \quad u_0(x) < v_+(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei v_- für eine nach links laufende Welle steht und v_+ für eine nach rechts laufende. Dann gelten für alle $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ die Ungleichungen

$$0 \leq u(t, x) < v_-(x + 2t), \quad 0 \leq u(t, x) < v_+(x - 2t).$$

In diesem Sinne können wir sagen, daß die Anfangsinformation zur Zeit $t = 0$ sich maximal mit Geschwindigkeit 2 ausbreitet.

Als nächstes widmen wir uns der Frage, inwieweit Frontlösungen sich ändern, wenn ihre Anfangsdaten gestört werden. Sei z.B. $u = u(t, x) = v(x - ct)$ eine solche Frontlösung (nach rechts laufend) mit Anfangswerten $u_0(x) = v(x)$. Weiterhin kann man zeigen, daß $\lim_{x \rightarrow -\infty} u_0(x) = 1$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_0(x) = 0$. Weiterhin ist u_0 eine streng monoton fallende Funktion von x . Nun betrachten wir Anfangswerte

$$\tilde{u}_0(x) = \min(u_0(x), \delta),$$

für ein δ mit $0 < \delta \ll 1$. Dann gilt $\|u_0 - \tilde{u}_0\|_X = \delta \ll 1$. Andererseits ist $\tilde{u}_0(x) > \delta/2$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und die Lösung mit Anfangswerten $\delta/2$ auf ganz \mathbb{R} strebt nach 1, wie bereits aus den Untersuchungen zur logistischen Gleichung bekannt. Nach dem Vergleichsprinzip strebt die Lösung zu Anfangswerten \tilde{u}_0 dann ebenfalls nach 1 (und zwar in der Topologie von X , also mit gleichmäßiger Konvergenz bezüglich x), entfernt sich also von der typischen Gestalt der Frontlösungen.

Andererseits sind Frontlösungen stabil gegenüber Störungen mit kompaktem Träger: Sei $u(t, x) = v(x - ct)$ eine Frontlösung mit Anfangswerten $u_0(x) = v(x)$. Sei \tilde{u}_0 eine Anfangsfunktion mit

$$0 < \tilde{u}_0(x) < 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

und $\tilde{u}_0(x) = u_0(x)$ für alle x außerhalb eines beschränkten Intervalls. Dann finden wir verschobene Anfangswerte $u_{0,l}$ und $u_{0,r}$ der Form

$$u_{0,l}(x) = u_0(x + C_l), \quad u_{0,r}(x) = u_0(x + C_r),$$

sodaß $u_{0,l}(x) < \tilde{u}_0(x) < u_{0,r}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Seien u_l und u_r die dazugehörigen Frontlösungen:

$$u_l(t, x) = u_{0,l}(x - ct), \quad u_r(t, x) = u_{0,r}(x - ct).$$

Nach dem Vergleichsprinzip ist dann $u_l(t, x) < u(t, x) < u_r(t, x)$, also bleibt der Graph von u eingesperrt zwischen den Graphen zweier Frontlösungen u_l und u_r , die sich beide mit derselben Geschwindigkeit bewegen.

4.6 Die viskose Gleichung von BURGERS

Die (viskose) Gleichung von Burgers lautet

$$\partial_t u = \partial_x^2 u - u \partial_x u,$$

wobei $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Anwendungen finden sich beim Beschreiben von viskosen kompressiblen Fluiden im \mathbb{R}^1 oder auch in der Verkehrssimulation.

Wir interpretieren diese Gleichung als ein parabolisches Problem mit einem weiteren Term $u \partial_x u$ niedriger Ordnung. Dementsprechend wählen wir als Grundraum

$$X = C_{b,glm}^0(\mathbb{R}).$$

Satz 4.16. *Sei $u_0 \in X$. Dann gibt es genau eine lokale milde Lösung $u \in C([0, t_0], X)$ mit $u(0) = u_0$.*

Beweis. Im Prinzip genauso wie bei KPP. □

Satz 4.17. *Seien u_1 und u_2 zwei Lösungen auf $[0, t_*] \times \mathbb{R}$ mit $u_1(t_0, x) < u_2(t_0, x)$ für ein $t_0 \in (0, t_*)$ und alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $u_1(t, x) \leq u_2(t, x)$ für alle $(t, x) \in (t_0, t_*) \times \mathbb{R}$.*

Beweis. Im Prinzip genauso wie bei KPP. □

Folgerung 4.18. *Klassische Lösungen zu Anfangsdaten $u_0 \in D(A)$ existieren für alle positiven Zeiten.*

Wir suchen auch bei der Burgers-Gleichung wandernde Wellen. Der Ansatz $u(t, x) = v(x - ct)$ führt uns dann auf

$$-cv' = v'' - vv'.$$

Nach Integration erhalten wir dann

$$cv + v' - \frac{1}{2}v^2 + d = 0,$$

wobei d sich als Integrationskonstante ergibt. Es ist natürlich, zu erwarten bzw. zu wünschen, daß die Lösung $v = v(s)$ für $s \rightarrow \pm\infty$ sich an feste Werte annähert:

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} v(s) = v_-, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} v(s) = v_+, \quad \lim_{s \rightarrow \pm\infty} v'(s) = 0.$$

Daraus gewinnen wir die Relationen

$$cv_{\pm} - \frac{1}{2}v_{\pm}^2 + d = 0.$$

Das können wir als quadratische Gleichung für v interpretieren, oder als Gleichung für c und d bei gegebenen v_+ , v_- :

$$\begin{pmatrix} v_+ & 1 \\ v_- & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} v_+^2 \\ v_-^2 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt läßt sich zeigen: solche Frontlösungen existieren, falls $\frac{v_+ - v_-}{c} > 0$.

Während bei der viskosen Burgers-Gleichung klassische Lösungen global existieren, ist die bei der *nicht*-viskosen Gleichung anders. Diese wird gegeben durch

$$\partial_t u = -u \partial_x u,$$

oder auch $\partial_t u + u \partial_x u = 0$. Dies ist interpretierbar als eine nichtlineare Transportgleichung, die man mittels der Charakteristikenmethode direkt lösen kann. Die Charakteristiken sind Geraden mit der Gleichung $x_0 + u_0(x_0)t = \text{const.}$. Und weil die Lösung entlang einer Charakteristik konstant ist, folgt

$$u(t, x_0 + u_0(x_0)t) = u_0(x_0), \quad \forall (t, x_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}.$$

Zu jeder solchen Charakteristik gehört im (t, x) -Diagramm ein Anstieg $u_0(x_0)$. Entlang dieser Charakteristik hat u den Wert $u_0(x_0)$. Und wenn sich nun zwei solche verschiedenen Charakteristiken für ein $t > 0$ schneiden, dann kann dort die Lösung nicht zwei verschiedene Werte haben; es bildet sich also eine Singularität in endlicher Zeit (ein sogenannter Schock).

Als Ergebnis bekommen wir, daß die Existenz zeitglobaler Lösungen bei der nichtviskosen Burgers-Gleichung nur in Ausnahmefällen möglich ist.

4.7 Die KORTEVEG – DE VRIES – Gleichung

Die Gleichung von Kortevæg und de Vries lautet

$$\partial_t u = -\partial_x^3 u + 6u\partial_x u, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R};$$

zumindest ist dies die Version, auf die wir unsere Untersuchungen beschränken. Eine besondere Rolle spielen solche Gleichungen bei Untersuchungen von ein-dimensionalen Wasserwellen und Solitonen. Weiterführende Darlegungen sind in [1] zu finden.

Um das Verhalten der Lösungen ein Stück weit zu verstehen, zerlegen wir die Gleichung in zwei Teile.

Der linearisierte Teil lautet

$$\partial_t u = -\partial_x^3 u;$$

diese Gleichung kann zum Beispiel mittels Fouriertransformation gelöst werden. Unter der Annahme von $u(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R})$, $\partial_t u(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R})$ und $\partial_x^3 u(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R})$ erhält man

$$\partial_t \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = -2 \int_{\mathbb{R}} u \partial_x^3 u \, dx = 2 \int_{\mathbb{R}} (\partial_x u)(\partial_x^2 u) \, dx = \int_{\mathbb{R}} \partial_x ((\partial_x u)^2) \, dx = 0,$$

also $\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u(0, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}$. Diese Identität interpretieren wir als „Energieerhaltung“. Man beachte, daß $\partial_x u$ dieselbe Gleichung löst wie u ; also gilt auch (unter geeigneten Voraussetzungen an die Glattheit und das Abklingen) $\|\partial_x u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\partial_x u(0, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

Weiterhin kann man zeigen, zum Beispiel über die Fouriertransformation, daß die Lösung gleichmäßig abklingt:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x)| \leq Ct^{-1/3} \int_{\mathbb{R}} |u(0, x)| \, dx.$$

Da nun die Lösung in der L^∞ -Norm abklingt, aber die L^2 -Norm erhalten bleibt, kann dies nur bedeuten, daß die Energie über den gesamten \mathbb{R}_x verteilt wird. Dies ist in Übereinstimmung damit, daß auch bei der linearisierten Kortevæg–de Vries–Gleichung Dispersion zu beobachten ist, genauso wie bei der freien Schrödinger–Gleichung.

Der andere Bestandteil von KdV lautet

$$\partial_t u = 6u\partial_x u,$$

und er verhält sich offensichtlich genauso wie die Burgers–Gleichung. Das bedeutet also die Erzeugung von Sprungstellen in endlicher Zeit sowie die Konzentration der Energie $\|\partial_x u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ in einem Punkt.

Für die volle KdV–Gleichung haben wir damit zwei konkurrierende Einflüsse ausgemacht mit entgegengesetzten „Zielen“:

- Dispersion: also die Verteilung der Energie auf ganz \mathbb{R} ,
- Erzeugung von Singularitäten: also die Konzentration der Energie an einer Stelle.

Die Frage ist nun, was dies alles für das Verhalten der Lösungen bedeutet.

Zunächst suchen wir wie immer wandernde Wellen:

$$u(t, x) = v(x - ct) = v(\xi).$$

Wir bekommen damit $-cv' = -v''' + 6vv'$, also nach Integration die Gleichung

$$-cv + v'' - 3v^2 = \text{const.}$$

Wir wünschen uns in unserer Situation $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} v(\xi) = 0$ sowie $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} v''(\xi) = 0$, woraus sich die Integrationskonstante zu 0 ergibt.

Als nächstes schaffen wir den Parameter c fort. Dazu setzen wir

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{c}}\zeta, \quad v(\xi) = c\tilde{v}(\zeta).$$

Daraus ergibt sich dann $v''(\xi) = c^2\tilde{v}''(\zeta)$, und wir erhalten die Dgl

$$-\tilde{v}(\zeta) + \tilde{v}''(\zeta) - 3\tilde{v}^2(\zeta) = 0.$$

Wir setzen $w = \tilde{v}'$, und es ergibt sich das System

$$\begin{cases} \tilde{v}' = w, \\ w' = \tilde{v} + 3\tilde{v}^2 \end{cases}$$

mit einer Lösung wie in Abbildung 4.1. Bemerkenswert ist, daß man die Lösung \tilde{v} sogar explizit angeben kann, woraus dann auch einer Darstellung für u folgt:

$$u(t, x) = -\frac{2c}{\cosh^2(\sqrt{c}(x - 4ct))}.$$

Beachtenswert ist der Zusammenhang zwischen Höhe bzw. „Breite“ dieser Welle sowie der Ausbreitungsgeschwindigkeit c .



Abbildung 4.1:

In einem nächsten Schritt betrachten wir die KdV-Gleichung als HAMILTONSches System. Dazu führen wir den Hamiltonian

$$H(u) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{u_x^2}{2} + u^3 \right) dx$$

ein und betrachten die Gateaux-Ableitung von H an der Stelle u , in Richtung einer Funktion $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x)$:

$$\begin{aligned} (\partial_u H)[v] &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (H(u + \varepsilon v) - H(u)) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}_x} \left(\frac{(u + \varepsilon v)_x^2}{2} - \frac{u_x^2}{2} + (u + \varepsilon v)^3 - u^3 \right) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} (2u_x \varepsilon v_x + \varepsilon^2 v_x^2) + 3u^2 \varepsilon v + 3u \varepsilon^2 v^2 + \varepsilon^3 v^3 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} -u_{xx} v + 3u^2 v dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} (-u_{xx} + 3u^2) v dx. \end{aligned}$$

Der letzte Term ergibt einen Sinn für $v \in X = L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, und dieses Integral ist eine reelle Zahl. Damit bekommen wir eine Abbildung

$$\begin{aligned}\partial_u H &: v \mapsto (\partial_u H)[v], \\ \partial_u H &: X \rightarrow \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Also interpretieren wir $\partial_u H$ als Element des Dualraums $X' = \mathcal{L}(X; \mathbb{R})$. Nun ist aber $X = L^2(\mathbb{R})$ ein Hilbertraum. Aus dem Darstellungssatz von Riesz folgt dann, daß jedes Element $g \in X'$ geschrieben werden kann mit Hilfe eines $\tilde{g} \in X$ und dem Skalarprodukt:

$$g(v) = \langle \tilde{g}, v \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(x)v(x) dx, \quad \forall v \in L^2(\mathbb{R}).$$

Die Abbildung von g zum eindeutig bestimmten \tilde{g} schreiben wir als β , also $\tilde{g} = \beta g$.

Für $g = \partial_u H \in X'$ lautet \tilde{g} gerade $\tilde{g} = -u_{xx} + 3u^2 \in X$.

Insgesamt haben wir damit, wenn $u = u(t, x)$ eine Lösung von KdV ist,

$$\partial_t u = -\partial_x^3 u + 3\partial_x(u^2) = \partial_x(-u_{xx} + 3u^2) = \partial_x \tilde{g} = \partial_x(\beta g) = \partial_x(\beta \partial_u H),$$

oder auch

$$\partial_t u = J\beta \partial_u H$$

mit $Jw := \partial_x w$. Man beachte, daß J schief-symmetrisch ist, denn

$$\langle Jw, v \rangle = \int_{\mathbb{R}} w_x v dx = - \int_{\mathbb{R}} w v_x dx = - \langle w, Jv \rangle.$$

Bemerkung 4.19. Wir erinnern, daß ein herkömmliches hamiltonsches System der Form

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases}$$

auch geschrieben werden kann als

$$\partial_t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \nabla H = J \nabla H,$$

und J ist schief-symmetrisch im Sinne von $J^\top = -J$. Die Entsprechung ergibt sich durch $\nabla \cong \beta \partial_u$.

Es ist zu erwarten, daß ein hamiltonsches System Erhaltungsgrößen aufweist. Und ein vollständig integrables System hat unendlich viele solche Erhaltungsgrößen. Eine einfach zu erratende ist die L^2 -Norm:

$$\begin{aligned}\partial_t \int_{\mathbb{R}} u^2(t, x) dx &= \int_{\mathbb{R}} 2u_t u_x dx = 2 \int_{\mathbb{R}} u(-u_{xxx} + 6uu_x) dx \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}} u_x u_{xx} + 2(u^3)_x dx = 2 \int_{\mathbb{R}} \partial_x (u_x^2 + 2u^3) dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

Für weitere Erhaltungsgrößen sollten wir zuerst unser Ziel festlegen:

Definition 4.20. Eine Gleichung der Form $\partial_t T(t, x) + \partial_x X(t, x) = 0$ heißt Erhaltungssatz.

Als Begründung für diese Begriffswahl nehmen wir an, daß $T \in C^1(\mathbb{R}_t; L^1(\mathbb{R}))$ und $X \in C(\mathbb{R}_t; W_1^1(\mathbb{R}))$. Dann ist

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}_x} T(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}} \partial_t T(t, x) dx = - \int_{\mathbb{R}} \partial_x X(t, x) dx = -X(t, x) \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = 0,$$

und somit $\int_{\mathbb{R}_x} T(t, x) dx = \text{const.}$ bezüglich t .

Offensichtlich ist

$$\partial_t u + \partial_x (\partial_x^2 u - 3u^2) = 0,$$

also ist $\int_{\mathbb{R}} u(t, x) dx$ eine Erhaltungsgröße.

Garantiert nicht mehr offensichtlich ist

$$\partial_t \left(u^3 + \frac{1}{2} u_x^2 \right) + \partial_x \left(-\frac{9}{2} u^4 + 3u^2 u_{xx} - 6uu_x^2 + u_x u_{xxx} - \frac{1}{2} u_x^2 \right) = 0.$$

Wenn wir nun $T_3(t, x) = u^3(t, x) + \frac{1}{2} u_x^2(t, x)$ setzen, dann bekommen wir $\int_{\mathbb{R}} T_3(t, x) dx = \text{const.}$ als Erhaltungsgröße.

Die nächste Erhaltungsgröße ist $T_4 = 5u^4 + 10uu_x^2 + u_{xx}^2$.

Wie kommt man nun darauf? Die Antwort liegt in der MIURA-Transformation. Dazu nehmen wir an, daß $u = u(t, x)$ eine reell-wertige Lösung der KdV-Gleichung ist, und daß für jedes ε mit $|\varepsilon| \ll 1$ eine komplex-wertige Funktion $w = w(t, x)$ existiert, für die

$$u(t, x) = w(t, x) + i\varepsilon w_x(t, x) - \varepsilon^2 w^2(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

gilt. Weiterhin setzen wir voraus, daß diese Funktion w glatt ist, daß sämtliche Ableitungen von w gleichmäßig in ε beschränkt sind, und daß w (zusammen mit allen Ableitungen) für $|x| \rightarrow \infty$ verschwindet.

Der Frage, ob es denn überhaupt eine solche Funktion w mit diesen vielen Eigenschaften gibt, wollen wir nicht nachgehen.

Formal stellen wir nach w um:

$$\begin{aligned} w &= u - i\varepsilon w_x + \varepsilon^2 w^2 \\ &= u - i\varepsilon (u - i\varepsilon w_x + \varepsilon^2 w^2)_x + \varepsilon^2 (u - i\varepsilon w_x + \varepsilon^2 w^2)^2 \\ &= u - i\varepsilon u_x - \varepsilon^2 w_{xx} - i\varepsilon^3 (w^2)_x + \varepsilon^2 u^2 + \varepsilon^2 \cdot 2u \cdot (-i\varepsilon w_x) + \dots \end{aligned}$$

Nach diesem Schema ersetzen wir jedes rechts auftauchende w durch $u - i\varepsilon w_x + \varepsilon^2 w^2$, rekursiv immer wieder aufs Neue. Wenn wir diesen Prozeß genügend viele Schritte durchlaufen lassen, bekommen wir

$$w = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k P_k(u) + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}),$$

wobei $P_k(u)$ einen Term bezeichnet, der auf gewisse Weise von u und dessen Ableitungen abhängt, und der Rest-Term darf noch Bestandteile von w enthalten. Wenn wir dann formal $N \rightarrow \infty$ schickten, bekämen wir eine asymptotische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k P_k(u)$, über deren Konvergenz nichts bekannt ist. Die zentrale Idee im Folgenden wird sein, für diese asymptotische Reihe einen Koeffizientenvergleich gleicher Potenzen von ε zu veranstalten.

Auf jeden Fall ist

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t u + \partial_x^3 u - 6uu_x \\ &= (w + i\varepsilon w_x - \varepsilon^2 w^2)_t + (w + i\varepsilon w_x - \varepsilon^2 w^2)_{xxx} - 6(w + i\varepsilon w_x - \varepsilon^2 w^2)(w + i\varepsilon w_x - \varepsilon^2 w^2)_x \\ &= \varepsilon^0 (w_t + w_{xxx} - 6ww_x) \\ &\quad + i\varepsilon (w_{xt} + w_{xxxx} - 6w_x w - 6w_{xx} w) + i\varepsilon (6\varepsilon^2 w_x (w^2)_x + 6w^2 w_{xx}) \\ &\quad - \varepsilon^2 (2ww_t + (w^2)_{xxx} - 6w_x w_{xx} - 6w(w^2)_x - 6w^2 w_x + 6\varepsilon^2 w^2 (w^2)_x) \\ &= \varepsilon^0 (w_t + w_{xxx} - 6ww_x + 6\varepsilon^2 w^2 w_x) \\ &\quad - i\varepsilon \partial_x (w_t + w_{xxx} - 6ww_x + 6\varepsilon^2 w^2 w_x) \\ &\quad - 2\varepsilon^2 w (w_t + w_{xxx} - 6ww_x + 6\varepsilon^2 w^2 w_x). \end{aligned}$$

Damit gilt folgendes: wenn w die **modifizierte** KdV-Gleichung

$$w_t + w_{xxx} - 6ww_x + 6\varepsilon^2 w^2 w_x = 0$$

löst, dann ist u eine Lösung von KdV. Nun setzen wir

$$I_\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}_x} w(t, x) dx.$$

Die modifizierte KdV-Gleichung können wir schreiben als $\partial_t w + \partial_x(w_{xx} - 3w^2 + 2\varepsilon^2 w^3) = 0$. Integration dieser Identität über \mathbb{R}_x liefert dann $\partial_t I_\varepsilon(t) = 0$, also ist I_ε unabhängig von t .

Und nun rechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \cdot 0 &= 0 \\ &= \partial_t I_\varepsilon(t) \\ &= \partial_t \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^N \varepsilon^k P_k(u) dx + \partial_t \int_{\mathbb{R}} \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}) dx \\ &= \sum_{k=0}^N \varepsilon^k \partial_t \int_{\mathbb{R}} P_k(u) dx + \partial_t \int_{\mathbb{R}} \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}) dx. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich entsprechender Potenzen von ε links und rechts (den man natürlich noch rechtfertigen muß) liefert uns dann viele Erhaltungsgrößen: für jeden Exponenten eine. Wir haben also $P_k(u) = T_k(t, x)$. Zum Beispiel gilt

$$I_\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}} (u - i\varepsilon u_x + \varepsilon^2(u^2 + u_{xx}) + i\varepsilon^3(\dots) + \dots) dx.$$

Der Term ε^0 ergibt uns genau $\int_{\mathbb{R}} u dx = \text{const.}$. Der nächste Term ist uninteressant. Der Term zu ε^2 liefert uns die Identität $\int_{\mathbb{R}} u^2 dx = 0$, und der Term mit ε^3 bringt uns genau T_3 .

Zum Abschluß betrachten wir **Zweier**-Solitonen. Dabei geht es um Folgendes. Bekanntlich ist die KdV-Gleichung nichtlinear, weshalb das Superpositionsprinzip nicht gelten kann. Wir kennen bereits Lösungen zu KdV, die aus einem einzelnen Soliton bestehen.

Kann dann die „Überlagerung“ zweier verschiedener Solitonen wieder eine Lösung ergeben? Die Antwort ist JA: es ist möglich, daß zwei Solitonen einander begegnen, durchdringen oder überholen, und dann ihren jeweiligen Weg fortsetzen, als ob nichts geschehen wäre. Und daß, obwohl die Gleichung nichtlinear ist.

Die dabei eingesetzte Methode ist die sogenannte **inverse Streutransformation**.

Sei $u = u(t, x)$ eine beschränkte Lösung zu KdV. Wir betrachten dann den Operator $L = L(t)$, definiert durch

$$L(t)v(x) = -\partial_x^2 v(x) + u(t, x)v(x).$$

Das ist also eine stationäre Schrödingergleichung mit Potential $u(t)$. Bekanntlich ist der Operator L selbstadjungiert im $L^2(\mathbb{R}_x)$, also

$$\langle Lv, w \rangle = \langle v, Lw \rangle$$

und $D(L) = D(L^*) = H^2(\mathbb{R}_x)$. Der Operator $L(t)$ hat diskretes und kontinuierliches Spektrum:

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma_{\text{disk}}(L(t)): &\Leftrightarrow \exists v \in H^2(\mathbb{R}) \text{ mit } Lv = \lambda v \text{ und } v \neq 0 \Leftrightarrow L - \lambda \text{ nicht injektiv,} \\ \lambda \in \sigma_{\text{cont}}(L(t)): &\Leftrightarrow L(t) - \lambda \text{ injektiv, } R(L(t) - \lambda) \text{ dicht in } L^2(\mathbb{R}), \text{ aber } R(L(t) - \lambda) \neq L^2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $R(L(t) - \lambda)$ den Bildraum des Operators $L(t) - \lambda$. Das diskrete Spektrum wird auch als Punktspektrum bezeichnet, es kann auch leer sein. Zum Beispiel hat $-\partial_x^2$ auf $L^2(\mathbb{R}_x)$ nur $\sigma_{cont} = [0, \infty)$.

In $X = C_{b,glm}^0$ gibt es endlich viele Eigenwerte $0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N$, und ein Kontinuum $[0, \infty)$ als kontinuierliches Spektrum. Wir schreiben $\lambda(k) = k^2$ als Element von σ_{cont} .

Zu $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ haben wir dann Eigenfunktionen ψ_k mit $\int_{\mathbb{R}} |\psi_k(x)|^2 dx = 1$ und asymptotischem Verhalten

$$\psi_k(x) \sim \begin{cases} e^{-\kappa_k x} & : x \rightarrow +\infty, \\ e^{\kappa_k x} & : x \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Hierbei ist $\kappa_k^2 = -\lambda_k$.

Zu den Einträgen $\lambda(k) = k^2$ des diskreten Spektrums haben wir „Eigenfunktionen“ $\psi(k, x)$ mit

$$\psi(k, x) \sim \begin{cases} e^{-ikx} + b(k)e^{ikx} & : x \rightarrow +\infty, \\ a(k)e^{-ikx} & : x \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Das bedeutet: für ein gegebenes Potential $u = u(t, x)$ haben wir Streudaten

$$(\lambda_k(t), c_k(t))_{k=1, \dots, N} \quad \text{sowie} \quad (\lambda(t, k), b(t, k))_{k \in \mathbb{R}}.$$

Es läßt sich zeigen (mit größerem Aufwand):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \lambda_k(t) &= 0, & \frac{d}{dt} \lambda(t, k) &= 0, \\ \frac{d}{dt} c_k(t) &= 4\kappa_k^3 c_k(t), & \frac{d}{dt} b(t, k) &= -8ikb(t, k). \end{aligned}$$

Es folgt, daß λ_k und $\lambda(\cdot, k)$ Erhaltungsgrößen sind.

Nun interessieren wir uns für die umgekehrte Richtung: seien die Daten a, b, c und λ gegeben. Wie sieht dann u aus?

Die Antwort können wir hier nur angeben und anhand eines Beispiels illustrieren, aber nicht begründen.

Zur Vereinfachung der Notation lassen wir oft die Variable t weg. Dann wird $u = u(x)$ gegeben durch

$$u(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x),$$

wobei $K = K(x, z)$ Lösung ist zu

$$K(x, z) + F(x+z) + \int_{y=x}^{\infty} K(x, y) F(y+z) dy = 0, \quad \forall z, \quad (4.4)$$

wobei

$$F(x) = \sum_{j=1}^N c_j^2 e^{-\kappa_j x} + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} b(k) dk.$$

Die Frage der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung K einer solchen Integralgleichung lassen wir offen.

Als Beispiel nehmen wir $N = 2$ sowie $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 2$ mit $c_1 = \sqrt{5}$ und $c_2 = \sqrt{7}$. Weiterhin sei $b(0, k) = 0$ für alle k . Dann folgt sofort $b(t, k) = 0$ als Lösung der Differentialgleichung für $b(\cdot, k)$. Wenn wir weiterhin die Differentialgleichungen für c_k lösen, bekommen wir

$$c_1(t) = \sqrt{5} e^{4t}, \quad c_2(t) = \sqrt{7} e^{32t}.$$

Ab jetzt wird die t -Abhängigkeit der Funktion c_k , F_k , K und l_k nicht mehr erwähnt (F_k und l_k werden gleich definiert).

Wir haben dann

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x) = 5e^{8t-x} + 7e^{64t-2x}.$$

Für $K = K(x, z)$ machen wir den Ansatz

$$K(x, z) = l_1(x)e^{-z} + l_2(x)e^{-2z},$$

mit im Moment noch unbekanntenen Funktionen l_1 und l_2 . Mit diesem Ansatz gehen wir in (4.4) hinein und bekommen:

$$0 = l_1(x)e^{-z} + l_2(x)e^{-2z} + F_1(x)e^{-z} + F_2(x)e^{-2z} \\ + \int_{y=x}^{\infty} (l_1(x)e^{-y} + l_2(x)e^{-2y}) (F_1(z)e^{-y} + F_2(z)e^{-2y}) dy.$$

Nun ist aber

$$\int_{y=x}^{\infty} e^{-\alpha y} dy = \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha},$$

und somit bekommen wir

$$0 = l_1(x)e^{-z} + l_2(x)e^{-z} + F_1(x)e^{-z} + F_2(x)e^{-2z} \\ + l_1(x)F_1(z) \cdot \frac{1}{2}e^{-2x} + l_1(x)F_2(z) \cdot \frac{1}{3}e^{-3x} \\ + l_2(x)F_1(z) \cdot \frac{1}{3}e^{-3x} + l_2(x)F_2(z) \cdot \frac{1}{4}e^{-4x}.$$

Wir erinnern an $F_1(z) = 5e^{8t-z}$ und $F_2(z) = 7e^{64t-2z}$.

Ein Koeffizientenvergleich bezüglich der linear unabhängigen Funktionen $z \mapsto e^{-z}$ und $z \mapsto e^{-2z}$ führt uns dann zu

$$0 = l_1(x) + F_1(x) + l_1(x) \cdot \frac{1}{2} \cdot 5e^{8t-2x} + l_2(x) \cdot \frac{1}{3} \cdot 5e^{8t-3x}, \\ 0 = l_2(x) + F_2(x) + l_1(x) \cdot \frac{1}{3} \cdot 7e^{64t-3x} + l_2(x) \cdot \frac{1}{4} \cdot 7e^{64t-4x}.$$

Dies können wir umschreiben zu

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{5}{2}e^{8t-2x} & \frac{5}{3}e^{8t-3x} \\ \frac{7}{3}e^{64t-3x} & 1 + \frac{7}{4}e^{64t-4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1(x) \\ l_2(x) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 5e^{8t-x} \\ 7e^{64t-2x} \end{pmatrix}.$$

Mittels Cramerscher Regel kommen wir dann auf

$$D = \left(1 + \frac{5}{2}e^{8t-2x}\right) \left(1 + \frac{7}{4}e^{64t-4x}\right) - \frac{35}{9}e^{64t-3x}e^{8t-3x} \\ = 1 + \frac{5}{2}e^{8t-2x} + \frac{7}{4}e^{64t-4x} + \frac{35}{72}e^{72t-6x}, \\ l_1(x) = \frac{1}{D} \det \begin{pmatrix} -5e^{8t-x} & \frac{5}{3}e^{8t-3x} \\ -7e^{64t-2x} & 1 + \frac{7}{4}e^{64t-4x} \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \left(-5e^{8t-x} + \frac{35}{12}e^{72t-5x}\right), \\ l_2(x) = \frac{1}{D} \det \begin{pmatrix} 1 + \frac{5}{2}e^{8t-2x} & -5e^{8t-x} \\ \frac{7}{3}e^{64t-3x} & -7e^{64t-2x} \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \left(-7e^{64t-2x} + \frac{35}{6}e^{72t-4x}\right).$$

Insgesamt bekommen wir dann

$$u(t, x) = -2\partial_x (l_1(t, x)e^{-x} + l_2(t, x)e^{-2x}).$$

Das kann man dann umformen zu

$$\frac{144e^{72t+6x} (2520 + 1975 \cosh(64t - 4x) + 4984 \cosh(8t - 2x) + 3415 \sinh(64t - 4x) + 9016 \sinh(8t - 2x))}{(35e^{72t} + 72e^{6x} + 126e^{64t+2x} + 180e^{8t+4x})^2}.$$

Es sollte auch möglich sein, diesen Ausdruck so umzuformen, daß sämtliche noch verbliebenen exp- und sinh-Terme ausgetauscht werden gegen cosh-Terme, sodaß am Ende nur noch $\cosh(2x - 8t)$, $\cosh(4x - 64t)$, $\cosh(x - 28t)$ und $\cosh(3x - 36t)$ übrig bleiben.

Ein anderer schöner Zweier-Soliton ist in [1] angegeben:

$$u(t, x) = -12 \frac{3 + 4 \cosh(2x - 8t) + \cosh(4x - 64t)}{(3 \cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t))^2}.$$

Das interessante x -Gebiet ist jeweils $[-30, 30]$ für ein Zeitintervall $[-8, 8]$.

Literaturverzeichnis

- [1] H. U. Andreas Müller-Rettkowski and G. Schneider. Lecture notes for the seminar SS06 about partial differential equations, 2006.
- [2] K.-J. Engel and R. Nagel. *A short course on operator semigroups*. Universitext. Springer, 2006.
- [3] J. Smoller. *Shock waves and reaction-diffusion equations. 2nd ed.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. 258. New York: Springer-Verlag, 1994.