# Stationäre quasilineare Modelle in der Hydrodynamik

**– Abschlußbericht –**

**(Laufzeit 01.06.2001 - 31.12.2003)**

**Projektleiter:**

Prof. Dr. Peter Takáč, Ph.D.
*Fachbereich Mathematik, Universität Rostock*
*Universitätsplatz 1, D - 18055 Rostock*

und

Prof. RNDr. Pavel Drábek, DrSc.
*Zentrum für Angewandte Mathematik, Westböhmische Universität Pilsen*
*P.O. Box 314, CZ - 306 14 Pilsen, Tschechische Republik*

## ABSCHLUSSBERICHT

**über die komplette Laufzeit 01.06.2001 - 31.12.2003**

Rostock, den 22. Januar 2004

## 1. Beschreibung der durchgeführten Arbeiten und Ergebnisse

Das durchgeführte Forschungsprojekt hat sich auf bestimmte stationäre Steuerungsprobleme aus der Strömungsmechanik newtonscher Flüssigkeiten konzentriert. Dafür haben wir ein allgemein anerkanntes Modell mit dem nichtlinearen Darcy-Gesetz *mit der $p$-ten Potenz* verwendet. Als Beispiel kann man mit unseren Methoden die Sickerung einer Flüssigkeit (Wasser) durch einen Damm behandeln. Solche Phänomene werden mittels partieller Differentialgleichungen beschrieben, die bestimmte Steuerungsparameter enthalten. In unserer Arbeit haben wir nur einen Steuerungsparameter gewählt, nämlich den *Spektralparameter* $\lambda$. Er reicht dazu völlig aus, um die Lösung der partiellen Differentialgleichung stark zu verändern. So können z.B. stationäre Zustände einer Flüssigkeit erzeugt und kontrolliert (gesteuert) werden.

Konkret haben wir das folgende nichtlineare Spektralproblem mit dem Spektralparameter $\lambda$ ausführlich untersucht:

$$-\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u + f(x, u(x)) \ \text{ in } \Omega; \qquad u = 0 \ \text{ auf } \partial\Omega. \tag{1}$$

Der quasilineare Operator $-\Delta_p$, wobei $\Delta_p u \equiv \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ den dirichletschen $p$-Laplace-operator mit $1 < p < \infty$ bezeichnet, entspricht der Fréchet Ableitung der gespeicherten Energie $\frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p \, \mathrm{d}x$, und $f(x,u)$ beschreibt die internen Energiequellen ($f \geq 0$) oder Energiesenken ($f \leq 0$) am Ort $x \in \Omega$. Dabei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (typischerweise $N = 1, 2, 3$) ein $N$-dimensionales Gebiet, welches von der beobachteten Materie eingenommen wird. Der Steuerungsmechanismus wird durch den reellen Parameter $\lambda$ betätigt. Wir haben vor allem den Fall von $\lambda$ nahe des ersten (kleinsten) kritischen Wertes $\lambda_1$ behandelt, welcher den ersten Eigenwert des quasilinearen Operators $-\Delta_p$ bezeichnet. Für $\lambda$ nahe von $\lambda_1$ entstehen interessante "singuläre" Lösungsveränderungen, die wir in mehreren gemeinsamen Veröffentlichungen untersucht haben; siehe projektbezogene Publikationen [1, 2, 3, 4] im Teil 4.

Die wichtigsten analytischen Lösungen des Randwertproblems (1) lassen sich als Bifurkationen (Verzweigungen) von Null ("kleine" Lösungen) oder von Unendlich ("große" Lösungen) konstruieren. Für $\lambda$ nahe von $\lambda_1$ haben wir die Tatsache ausgenutzt, das $\lambda_1$ ein einfaches Eigenwert mit der zugehörigen Eigenfunktion $\varphi_1$ ist, wobei $\varphi_1$ positiv in $\Omega$ ist. Deswegen lassen sich sowohl "kleine" als auch "große" Lösungen asymptotisch für $\lambda$ nahe von $\lambda_1$ als $u = t^{\pm 1}(\varphi_1 + v^\top)$ darstellen, wobei $t \in \mathbb{R}$ mit $|t|$ hinreichend klein die "Größe" der Lösung mißt und $v^\top$ nur eine relativ geringe Störung von $\varphi_1$ darstellt mit $\int_\Omega v^\top \varphi_1 \, \mathrm{d}x = 0$. In der gemeinsamen Arbeit Drábek, Girg, Takáč und Ulm [1] haben wir die asymptotische Abhängigkeit $\lambda \equiv \lambda(t)$ für $t \to 0$ so genau bestimmt, daß wir daraus die Lösbarkeit des Randwertproblems (1) schlußfolgern können. Für verschiedene Reaktionsfunktionen $f(x,u)$ haben sich daraus bis dahin unbekannte Ergebnisse ergeben; siehe die Arbeit Drábek, Girg und Takáč [2]. Vom Standpunkt der Mechanik sind vor allem *globale*, aber auch *lokale Minimalstellen* des Energiefunktionals $\mathcal{J}_\lambda$ von Bedeutung, wobei

$$\mathcal{J}_\lambda(u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p \, \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{p} \int_\Omega |u|^p \, \mathrm{d}x - \int_\Omega F(x,u) \, \mathrm{d}x, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{2}$$

und

$$F(x,u) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^u f(x,t) \, \mathrm{d}t \qquad \text{für } x \in \Omega \text{ und } u \in \mathbb{R}.$$

Jede kritische Stelle $u$ von $\mathcal{J}_\lambda$ ist eine schwache Lösung des Randwertproblems (1) und umgekehrt. Um diese zu finden ist es oft notwendig, auch so genannte *Sattelpunkte* von $\mathcal{J}_\lambda$ zu bestimmen. Strenge lokale Minimalstellen liefern *stabile Lösungen* der Dirichlet-Randwertaufgabe (1), während Sattelpunkte nur *nichtstabile Lösungen* von (1) sind.

## 4. Projektbezogene Publikationen, Patentanmeldungen

Die Arbeit [1] wurde beim zweiten Besuch der tschechischen Partner, Prof. Drábek und Dr. Girg, in Rostock (15.-29.04.2002) fertiggestellt. Die Arbeit [2] wurde beim dritten Besuch der tschechischen Partner, Prof. Drábek und Dr. Girg, in Rostock (02.-16.04.2002) fertiggestellt. Die Arbeit [3] stellt eine ganz andere, unabhängige alternative Methode zur Arbeit [1] vor und ist parallel entstanden. Die letzte Arbeit [4] ist ein umfangreicher Überblick über verschiedene Methoden, welche auch in den Arbeiten anderer Forscher verwendet worden sind.

### Literatur

1. P. Drábek, P. Girg, P. Takáč, and M. Ulm, *The Fredholm alternative for the p-Laplacian: bifurcation from infinity, existence and multiplicity of solutions*, Indiana Univ. Math. J., **??**(?) (2004), angenommen zur Veröffentlichung.
2. P. Drábek, P. Girg, and P. Takáč, *Nonlinear perturbations of homogeneous quasilinear operators: bifurcation from infinity, existence and multiplicity*, J. Differential Equations, **??**(?) (2004), angenommen zur Veröffentlichung.
3. P. Takáč, *A variational approach to the Fredholm alternative for the p-Laplacian near the first eigenvalue*, Advances in Differential Equations, **??**(?) (2004), eingereicht zur Veröffentlichung.
4. P. Takáč, *Nonlinear Spectral Problems for Degenerate Elliptic Operators*, in M. Chipot and P. Quittner; eds., *"Handbook of Differential Equations: Stationary Partial Differential Equations"*, Vol. **1**, pp. ??–??. Elsevier Science B.V., Amsterdam, The Netherlands, 2004. (Eingereicht zur Veröffentlichung nach Anfrage der Verfasser.)