Explizite Lösungsmethoden für den stationären Schrödinger-Operator und sein Spektrum

Prof. Dr. Peter Takáč, Institut für Mathematik, Universität Rostock

Die Zusammenarbeit zwischen den beiden Forschergruppen hat sich auf zwei stationäre Modelle aus der Mathematischen Physik konzentriert: (1) die (klassische) *lineare Schrödinger-Gleichung* mit einem unbeschränkten Potential und (2) ein elliptisches *Dirichlet-Problem mit dem p-Laplace-Operator* und einer (bei Null) singulären Reaktionsfunktion.

Zu Modell (1): In den gemeinsamen Arbeiten [1], [2] (siehe Teil C-3) wurden "nahe optimale" Bedingungen für das elektrische Potential $q(x)$ gefunden, damit man z.B. den Absolutbetrag *jeder* Eigenfunktion des Schrödinger-Operators $\mathcal{A} = -\Delta + q(x)\bullet$ durch die erste Eigenfunktion φ_1 (d.h. durch den Grundzustand, $\varphi_1 > 0$ in Ω) abschätzen kann. Dies wurde durch den Nachweis der Kompaktheit der Resolventen von $\mathcal{A}$ in dem sog. Grundzustandsraum X erzielt. Dabei ist der Banach-Raum X durch

$$X = \{f \in L^2(\mathbb{R}^N)\colon f/\varphi_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)\}, \quad \|f\|_X = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^N} (|f|/\varphi_1)\,,$$

definiert, so daß $X \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$. Diese neue Idee wurde von einem anonymen Gutachter der Arbeit [1] als hervorragend beurteilt.

Zu Modell (2): In der Arbeit [3] (siehe Teil C-3) wurden vielfache (d.h. mindestens *zwei* verschiedene) positive Lösungen für das folgende Dirichlet-Problem mit dem p-Laplace-Operator $\Delta_p u \equiv \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ $(1 < p < \infty)$ gefunden:

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = \dfrac{\lambda}{u^\delta} + u^q & \text{in } \Omega; \\ \qquad u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \quad u > 0 \quad \text{in } \Omega, \end{cases}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$ ist, $1 < p < N$, $p < q \le p^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Np}{N-p}$, und $\delta \in (0,1)$ und $\lambda \in (0,\Lambda)$ sind parameter, mit

$$\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\lambda > 0\colon \text{(P) hat keine schwache Lösung}\}\,.$$

In der Arbeit [4] (siehe Teil C-3) wurde eine dem p-Laplace-Operator entsprechende Evolutionsgleichung mittels logarithmischer Sobolev-Ungleichungen behandelt.