Qualitative Untersuchungen von degenerierten und singulären quasilinearen Differentialgleichungen

Prof. Dr. Peter Takáč, Institut für Mathematik, Universität Rostock

ERGEBNISSE DES GEMEINSAMEN FORSCHUNGSPROJEKTES

Die beiden Forschergruppen haben ihre gemeinsamen Untersuchungen auf zwei stationäre Modelle aus der Materialwissenschaft konzentriert: (1) Das erste Modell wird durch die *Fredholm-alternative* für ein Eigenwertproblem mit dem *p-Laplace-Operator* und einem $(p-1)$-homogenen Ausdruck (Potenz) dargestellt. (2) Das zweite Modell wird durch die stationäre *Cahn-Hilliard-Gleichung* mit dem *p-Laplace-Operator* und einer kubischen Reaktionsfunktion beschrieben.

Im ersten Projektjahr 2006 lag der Schwerpunkt der Zusammenarbeit in der Untersuchung des ersten Modells. Daraus sind die folgenden drei Veröffentlichungen entstanden, zwei davon gemeinsam mit unseren tschechischen Kollegen:

[1] P. Drábek and P. Takáč, *Poincaré Inequality and Palais-Smale Condition for the p-Laplacian*, Calculus of Variations, **29** (2007), 31–58. *Online*: DOI: 10.1007/s00526-006-0055-8.

[2] P. Girg and P. Takáč, *Bifurcations of positive and negative continua in quasilinear elliptic eigenvalue problems*, Annales Henri Poincaré, **??**(?) (2008), ???–???, angenommen zur Veröffentlichung.

[3] J. Merker, *Generalizations of logarithmic Sobolev inequalities*, Discr. and Continuous Dynam. Systems, Series S, **1**(2) (2008), 329–338.

In der ersten Arbeit wurden vor allem zwei wichtige offene Fragen untersucht und beantwortet: eine verfeinerte Poincaré'sche Ungleichung und die Gültigkeit der Palais-Smale'schen Bedingung für das Energiefunktional

$$\mathcal{J}_\lambda(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}x - \int_\Omega f u \,\mathrm{d}x$$

auf $W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, wobei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^N$ ist, $\lambda \in \mathbb{R}$ ist ein Spektral- (oder Regelungs-) -parameter und $f \in L^\infty(\Omega)$ eine vorgegebene Funktion, $f \not\equiv 0$ in Ω.

Über diese Arbeit haben die beiden Authoren bei einem internationalen Kongreß im Juni 2006 in Poitiers (Frankreich) und bei einem internationalen Workshop im September 2006 an der Universidad de Chile in Santiago de Chile (Chile) Vorträge gehalten.

In der zweiten Arbeit wurde die Existenz *globaler Verzweigungen* (*Bifurkationen*) von Kontinuen kritischer Punkte $u = u_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega)$ des Energiefunktionals $\mathcal{J}_\lambda$ in den *positiven* und *negativen* "Richtungen" gezeigt. Dabei handelt es sich um das *positive* und das *negative* Kontinuum von Paaren (u_λ, λ) im kartesischen Produkt $W_0^{1,p}(\Omega) \times \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^+$ bzw. $\mathcal{C}^-$, welche (mindestens) einen gemeinsamen Punkt in $(0, \lambda_1)$ enthalten. Dabei bezeichnet λ_1 $(\lambda_1 > 0)$ den ersten Eigenwert von $-\Delta_p$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Die dritte Arbeit stellt eine sehr innovative Optimierungsmethode vor, mit welcher sich *optimale Konstanten* in bestimmten logarithmischen Sobolev-Ungleichungen berechnen lassen.

Das zweite Modell wurde in den beiden Projektjahren 2006 und 2007 in der folgenden gemeinsamen Arbeit untersucht:

> P. Drábek, R. F. Manásevich, and P. Takáč, *Stationary Solutions for a Quasilinear Model for Phase Transitions in One Space Dimension*, Nonlinearity, **??** (2008), ???–???, wird bald eingereicht zur Veröffentlichung,

welche im zweiten Projektjahr 2007 fast vollständig fertiggestellt wurde. Dabei haben wir einige neue Phänomene bei der mikroskopischen Theorie der Phasentrennung entdeckt. Ein typisches Phänomen im Standardmodell von Cahn und Hilliard für eine Trennung von zwei Phasen ist eine *sehr langsame Bewegung* von einem Zustand mit mehreren Komponenten derselben Phase zu einem anderen Zustand, in welchem jede der zwei möglichen Phasen nur möglichst wenige Komponenten hat (ideal nur eine). Mathematisch (analytisch) wird dieser langsame Überagang mit der "Mannigfaltigkeit der langsamen Bewegung" (*slow motion manifold*) beschrieben. Diese Mannigfaltigkeit wird im Standardmodell von Cahn und Hilliard mittels approximativer Gleichgewichtszustände beschrieben. Für eine Vielfalt von Materialien mit Phasentrennung ist diese Methode weniger realistisch als Benutzung von echten Gleichgewichtszuständen in einem ähnlichen Modell.

Zusammen mit Herrn Prof. Drábek haben wir eine verallgemeinerte Version vom Cahn--Hilliard-Modell untersucht, in welchem nur echte Gleichgewichtszustände vorkommen. Es handelt sich um die Gleichung

$$u_t = \left[-\varepsilon^p \left(|u_x|^{p-2} u_x\right)_x + W'(u)\right]_{xx} \qquad \text{für } 0 < x < 1 \text{ und } t > 0, \tag{1}$$

mit den Randbedingungen

$$u_x = \left(|u_x|^{p-2} u_x\right)_{xx} = 0 \qquad \text{bei } x = 0,\, 1, \quad \text{für } t > 0, \tag{2}$$

wobei $1 < p < \infty$, $\varepsilon > 0$, und $W\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist ein vorgegebenes Potential (eine Function der Klasse C^1), dessen erste Ableitung möglicherweise nur Hölder-stetig ist.

Unsere Motivierung fängt beim "Double-Well-Potential" $W(s) = (1 - s^2)^2$ für $s \in \mathbb{R}$, welches genau zwei Stellen des globalen Minimums besitzt, nämlich, $s_1 = -1$ und $s_2 = 1$. Diese globalen Minimalstellen sind nicht degeneriert, da $W'(\pm 1) = 0$ und $W''(\pm 1) = 8 > 0$. Diese Tatsache liefert ein ganz *unterschiedliches Verhalten* von stationären Lösungen (Gleichgewichtszuständen), die der folgenden Neumannschen Randwertaufgabe genügen

$$-\varepsilon^p \left(|u_x|^{p-2} u_x\right)_x + W'(u) = 0, \quad 0 < x < 1; \tag{3}$$

$$u_x(0) = u_x(1) = 0, \tag{4}$$

im Falle der linearen Diffusion ($p = 2$) und im Falle einer degenerierten nichtlinearen Diffusion ($p > 2$). Die letztere weist eine viel größere Vielfalt von stationären Lösungen auf. Wir haben solche Lösungen eingehend untersucht und *alle* ausführlich beschrieben, einschließlich Ihrer Stabilitätseigenschaften (lokale Minimalstellen oder Sattelpunkte des Energiefunktionals).

1. Publikationen

- ***davon bereits veröffentlicht oder im Druck***:

[1] P. Drábek and P. Takáč,
Poincaré Inequality and Palais-Smale Condition for the p-Laplacian,
Calculus of Variations, **29** (2007), 31–58. *Online*: DOI: 10.1007/s00526-006-0055-8.

[2] P. Girg and P. Takáč,
Bifurcations of positive and negative continua in quasilinear elliptic eigenvalue problems,
Annales Henri Poincaré, **??**(?) (2008), ???–???, angenommen zur Veröffentlichung.

[3] Jochen Merker,
Generalizations of logarithmic Sobolev inequalities,
Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series S, **1**(2) (2008), 329–338.

- ***bald zur Veröffentlichung eingereicht***:

[4] P. Drábek, R. F. Manásevich, and P. Takáč,
Stationary Solutions for a Quasilinear Model for Phase Transitions in One Space Dimension,
Nonlinearity, **??** (2008), ???–???, wird bald eingereicht zur Veröffentlichung.

2. Konferenzbeiträge / Poster

[1] Bei der ***"Sixth AIMS International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations"***, June 25 – 28, 2006, Poitiers, France, haben J. Merker und P. Takáč ***auf Einladung der Veranstalter*** je einen Konferenzvortrag gehalten.

Themen: *Logarithmic Sobolev inequalities and ultracontractive nonlinear semigroups* (J. Merker); *An antimaximum principle for a degenerate parabolic problem* (P. Takáč).

[2] Bei der Tagung ***"Variational Methods: Open Problems, Recent Progress, and Numerical Methods, II"***, May 23 – 26, 2007, Flagstaff, Arizona, U.S.A., hat P. Takáč einen der ***Hauptvorträge*** gehalten.

Thema: *The Fredholm alternative for the p-Laplacian*: a variational approach.

[3] Bei der ***"Seventh Mississippi State - UAB Conference on Differential Equations and Computational Simulations"***, Nov. 1 – 3, 2007, Birmingham, Alabama, U.S.A., hat P. Takáč einen der ***Hauptvorträge*** gehalten.

Thema: *Two variational problems with the p-Laplacian*: a stationary Cahn-Hilliard model and the Fredholm alternative near the first eigenvalue.