

# ABSCHLUSSBERICHT

ÜBER DAS FORSCHUNGSFREISEMESTER  
“SOMMERSEMESTER 2009” (DFG-PROJEKT)

## DIE QUASILINEARE CAHN-HILLIARD-GLEICHUNG IN DER MIKROSKOPISCHEN THEORIE DER PHASENTRENNUNG

PROJEKTLEITER: PROF. DR. PETER TAKÁČ, PH.D.

Dieses Forschungsprojekt wurde  
von der *Deutschen Forschungsgemeinschaft* (D.F.G.),  
vom *Deutschen Akademischen Austauschdienst* (D.A.A.D.) und  
vom *Institute for Mathematics and its Applications* (IMA, U.S.A.)  
finanziell unterstützt.

### 1. ALLGEMEINE ANGABEN

#### 1.1. Projektleiter (verantwortlich für die Durchführung).

Takáč, Peter, Prof. Dr. Ph.D.; Professor (C4) – *Lehrstuhl für Angewandte Analysis*  
Institution: Universität Rostock, Institut für Mathematik

Dienstadresse: Institut für Mathematik  
Universität Rostock  
Ulmenstraße 69, Haus 3  
18051 Rostock

#### 1.2. Thema.

***Analytische und numerische Methoden für Modellierung der Phasentrennung:***

Vor allem analytische aber auch numerische Methoden für die Untersuchung von Singularitäten und der Musterbildung im Cahn-Hilliard-Modell mit sehr allgemeiner Energie wurden mit Methoden der *partiellen Differentialgleichungen* und der *Variationsrechnung* untersucht.

**Kennwort. Cahn-Hilliard-Modell**

#### 1.3. Fachgebiet und Arbeitsrichtung.

Angewandte Mathematik (partielle Differentialgleichungen, Variationsrechnung und dynamische Systeme)

## 2. ARBEITS- UND ERGEBNISBERICHT ÜBER DIE FORSCHUNG

## 2.1. Anfangsfragen und Zielsetzung des Projektes.

Dieses Forschungsprojekt hat sich mit der Entwicklung und den Anwendungen von Methoden der *modernen Funktionalanalysis* auf verschiedene Probleme beschäftigt, die in den allgemein anerkannten mathematischen Modellen für Phasentrennung von CAHN und HILLIARD vorkommen. Das Projektziel war eine möglichst genaue Beschreibung von allen möglichen **stationären Zuständen** und der **Musterbildung** (bei der Phasentrennung) in einem Material mit zwei Phasen mittels vor allem analytischer aber auch numerischer Methoden.

Diese Forschungsprobleme wurden während des

**IMA Thematic Year on Mathematics and Chemistry**

<http://www.ima.umn.edu/2008-2009/>

**September 1, 2008 - June 30, 2009**

an der **University of Minnesota, Minneapolis, U.S.A.**, behandelt.

Der Berichterstatter hat 2 Monate (01.02.–31.03.2009) aus seinem Forschungsfreisemester “Sommersemester 2009”, **01.02.2009 – 30.08.2009**, am *Institute for Mathematics and its Applications (IMA)* an der University of Minnesota in Minneapolis, U.S.A., verbracht. Das Institut “IMA” hat dem Antragsteller die volle finanzielle Unterstützung für die Zeitspanne von zwei (2) Monaten gewährleistet.

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen spielen eine wichtige Rolle in der mathematischen Modellierung der Phasentrennung, z.B. bei der Herstellung von Legierungen. Bei einer bestimmten kritischen Temperatur ist eine Koexistenz von zwei flüssigen Metallen möglich. Nach einer Temperatursenkung werden die zwei Metallkomponenten getrennt. Die zwei Phasen können ein ziemlich kompliziertes Muster bilden, siehe [[DMT]]. Eine sehr interessante Aufgabe ist es, ein solches Muster sowohl experimentell als auch theoretisch zu untersuchen. Dabei kann sich das Muster bei der kritischen Temperatur räumlich und zeitlich ändern. Für dieses ingenieurwissenschaftliche Problem gibt es zahlreiche mathematische Modelle. Das CAHN-HILLIARD-Modell eignet sich sehr gut nicht nur für rigorose analytische Untersuchungen, sondern auch für numerische Simulationen und Experimente, die man bei praktischer Untersuchung einer Phasentrennung braucht.

Die wichtigste Aufgabe dieses Forschungsprojektes war eine rigorose mathematisch-analytische und numerische Untersuchung der **Musterbildung** im zwei- und drei-dimensionalen Cahn-Hilliard-Modell für eine Trennung von zwei Phasen. Die zwei Phasen (z.B. Metallkomponenten) befinden sich in einem beschränkten Raumgebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ( $N = 1, 2$  oder  $3$ ). Ihr Verhältniss am Ort  $x \in \Omega$  zum Zeitpunkt  $t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$  wird standardmäßig durch die Funktionen  $\frac{1}{2}(1 + u(x, t))$  (der Anteil der Phase 1) und  $\frac{1}{2}(1 - u(x, t))$  (der Anteil der Phase 2) beschrieben, wobei natürlich  $-1 \leq u(x, t) \leq 1$  gilt. Die unbekannte Funktion  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  (“*Ordnungsparameter*”) erfüllt die sog. CAHN-HILLIARD-Gleichung (siehe [[C-H]]).

## LITERATUR

- [C-H]. J. W. Cahn and J. E. Hilliard, *Free energy of a nonuniform system I, Interfacial free energy*, Journal of Chemical Physics, **28** (1958), 258–267.
- [DMT]. P. Drábek, R. F. Manásevich, and P. Takáč, *Manifolds of critical points in a quasilinear model for phase transitions*, In “Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations”, Proceedings of the 2009 “International Workshop in Nonlinear Elliptic PDEs,” A celebration of Jean-Pierre Gossez’s 65-th birthday, September 2–4, 2009, Brussels, Belgium. Contemporary Mathematics, Vol. ???, pp. ???–???, American Mathematical Society, Providence, R.I., U.S.A., 2010, accepted for publication.

## 2.2. Wissenschaftliche Ergebnisse der Forschung.

Die *Musterbildung* im ein-dimensionalen Cahn-Hilliard-Modell wurde in der Arbeit [1] (gemeinsam mit P. DRÁBEK und R. F. MANÁSEVICH) vollständig beschrieben. Für kugelsymmetrische Musterbildung in einem Euklidischen Raum beliebiger Dimension  $N$  ist es ebenso gemacht worden, in der Arbeit des Berichterstatters [2].

Für allgemeinere Gebiete in einem zwei- und drei-dimensionalen Euklidischen Raum wird die Forschungsarbeit weiter fortgesetzt. Der Berichterstatter arbeitet darauf gemeinsam mit Herrn Prof. Dr. PAVEL DRÁBEK (Westböhmische Universität Pilsen, Tschechien) und mit den Doktoranden, Frau Dipl.-Math. ANN DERLET (Université Libre de Bruxelles, Belgien) und Herrn Dipl.-Ing. JOSEF OTTA (Westböhmische Universität Pilsen, Tschechien). Die zwei Doktoranden haben im “Wintersemester 2009/2010” jeweils 2 (zwei, Frau DERLET) und 4 (vier, Herr OTTA) Monate bei meinem Lehrstuhl an der Universität Rostock verbracht. Die Zusammenarbeit mit der Westböhmischen Universität Pilsen wurde auch durch ein P.P.P.-Austauschprojekt vom D.A.A.D. finanziell unterstützt. Die vor kurzem fertiggestellte Dissertation von Herrn OTTA (eingereicht bei der Westböhmischen Universität Pilsen) enthält mehrere richtungsweisende numerische Simulationen für weitere analytische Untersuchungen der Musterbildung in zwei Dimensionen.

Der Projektleiter hat auf Einladungen ausländischer Universitäten mehrere Vorträge über seine Arbeiten gehalten:

- (i) vom 01.02. bis 31.03.2009: mehrere Vorträge an der *University of Minnesota*, Minneapolis, Minnesota;
- (ii) am 24.03.2009: *Mississippi State University*, Starkville, U.S.A.
- (iii) am 17.04.2009: *Université Toulouse 1*, Toulouse, Frankreich;
- (iv) am 13.05.2009: *Universidad de Granada*, Granada, Spanien;
- (v) am 25.05.2009: *Westböhmische Universität*, Pilsen, Tschechien  
(als Hauptvortragender beim IMST-Kongreß in Pilsen);
- (vi) am 25.06.2009: *Université Toulouse 1*, Toulouse, Frankreich;
- (vii) am 27.08.2009: *Westböhmische Universität*, Pilsen, Tschechien.

### 2.3. Liste der Publikationen aus diesem Projekt.

Die wissenschaftlichen Ergebnisse aus diesem Projekt wurden (oder werden) in den folgenden Arbeiten veröffentlicht (Sonderdrucke aller acht Arbeiten ([1] – [8]) sind beigelegt):

- [1] P. DRÁBEK, R. F. MANÁSEVICH, and P. TAKÁČ, *Manifolds of critical points in a quasilinear model for phase transitions*, In “Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations”, Proceedings of the 2009 “International Workshop in Nonlinear Elliptic PDEs,” A celebration of Jean-Pierre Gossez’s 65-th birthday, September 2–4, 2009, Brussels, Belgium. Contemporary Mathematics, Vol. ???, pp. ???–???, American Mathematical Society, Providence, R.I., U.S.A., 2010, accepted for publication.
- [2] P. TAKÁČ, *Stationary radial solutions for a quasilinear Cahn-Hilliard model in  $N$  space dimensions*, Electr. J. Differential Equations, Conf. **17** (2009), 227–254. In Proceedings of the “Seventh Mississippi State - UAB Conference on Differential Equations and Computational Simulations”, November 1 – 3, 2007, Birmingham, Alabama, U.S.A.
- [3] B. ALZIARY and P. TAKÁČ, *Intrinsic ultracontractivity of a Schrödinger semigroup in  $\mathbb{R}^N$* , J. Funct. Anal., **256** (2009), 4095–4127. *Online*: doi: 10.1016/j.jfa.2009.02.013.
- [4] J. F. PADIAL, L. TELLO, and P. TAKÁČ, *An antimaximum principle for a degenerate parabolic problem*, Advances in Differential Equations, **15**(7–8) (2010), 601–648.
- [5] J. BENEDIKT, P. GIRG, and P. TAKÁČ, *On the Fredholm alternative for the  $p$ -Laplacian at higher eigenvalues (in one dimension)*, Nonlinear Analysis, T.M.A., **72**(6) (2010), 3091–3107.
- [6] A. DERLET, J.-P. GOSSEZ, and P. TAKÁČ, *Minimization of eigenvalues for a quasilinear elliptic Neumann problem with indefinite weight*, J. Math. Anal. Appl., ???(?) (2010), ???–???. *Online*: doi: 10.1016/j.jmaa.2010.03.068.
- [7] P. DRÁBEK and P. TAKÁČ, *On variational eigenvalues of the  $p$ -Laplacian which are not of Ljusternik-Schnirelmann-type*, J. London Math. Society, ???(?) (2010), ???–???. *Online*: doi: 10.1112/jlms/jdq006.
- [8] M. CUESTA and P. TAKÁČ, *Nonlinear eigenvalue problems for degenerate elliptic systems*, Differential and Integral Equations, ???(??–??) (2010), ???–???, accepted for publication.

Alle bereits veröffentlichten Arbeiten wurden von den Gutachtern hoch bewertet.

### 3. ZUSAMMENARBEIT MIT ANDEREN WISSENSCHAFTLERN

Außer dem *Institute for Mathematics and its Applications (IMA)* an der University of Minnesota in Minneapolis, U.S.A., wurde Zusammenarbeit mit den folgenden wissenschaftlichen Einrichtungen aufgebaut:

1. University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota, U.S.A.: Prof. PETER A. REJTO
2. Mississippi State University, Starkville, U.S.A.: Prof. RATNASINGHAM SHIVAJI
3. Université Toulouse 1, Toulouse, Frankreich:  
Prof. BENEDICTE ALZIARY-CHASSAT, Prof. JACQUELINE FLECKINGER-PELLÉ
4. Université de Pau et des Pays de l'Adour, Pau, Frankreich:  
Prof. JACQUES GIACOMONI, Prof. MONIQUE MADAUNE-TORT
5. Universidad de Granada, Granada, Spanien:  
Prof. MARGARITA ARIAS, Prof. JUAN CAMPOS
6. Westböhmische Universität Pilsen, Tschechien:  
Prof. PAVEL DRÁBEK, Doz. PETR GIRG
7. Russische Akademie der Wissenschaften Ufa, Rußland:  
Prof. YAVDAT SH. IL'YASOV

### 4. DOKTORANDENAUSBILDUNG

Während der Dauer des Forschungsprojektes hat der Projektleiter drei Doktoranden mitbetreut, Frau Dipl.-Math. ANN DERLET (Université Libre de Bruxelles, Belgien), Herrn Dipl.-Ing. JOSEF OTTA (Westböhmische Universität Pilsen, Tschechien) und Herrn Dipl.-Math. EUGEN STUMPF (Universität Rostock). Darüberhinaus bereitet sich am Lehrstuhl des Projektleiters auf seine Habilitation Herr Dr. JOCHEN MERKER. Ihre Forschungsaufenthalte beim IMA an der University of Minnesota werden in naher Zukunft geplant.

## 5. BERICHT ÜBER REISEN

**Der Zeitraum 01.02.2009 – 31.12.2009**

- (a) *Reise zwischen Rostock und Minneapolis, U.S.A. (IMA):*  
31.01.2009 – 01.04.2009
- (b) *Reise zwischen Rostock und Toulouse, Frankreich:*  
14.04.2009 – 27.04.2009
- (c) *Reise zwischen Rostock und Granada, Spanien:*  
04.05.2009 – 17.05.2009
- (d) *Reise zwischen Rostock und Pilsen, Tschechien:*  
04.05.2009 – 17.05.2009
- (e) *Reise zwischen Rostock und Toulouse, Frankreich:*  
08.06.2009 – 29.06.2009
- (f) *Einmonatiger Aufenthalt von Prof. Yavdat Il'yasov (Ufa) in Rostock:*  
15.09.2009 – 15.10.2009
- (g) *Reise zwischen Rostock und Pilsen, Tschechien:*  
22.11.2009 – 29.11.2009
- (h) *11-tägiger Aufenthalt von Prof. Juan Campos (Granada) in Rostock:*  
03.12.2009 – 13.12.2009

Die Komplexität der Projektziele machte es zwingend notwendig, auf internationaler Ebene zu kooperieren und die Forschungsergebnisse auf Kongressen einem internationalem Publikum vorzustellen und mit anderen Wissenschaftlern zu diskutieren. Dies geschah beim Kongreß

“*International Conference on Interdisciplinary  
Mathematical & Statistical Techniques*” (IMST 2009)  
during May 23–26, 2009 (Saturday to Tuesday)  
in the Primavera Hotel, Plzeň, Czech Republic,

organisiert von der Westböhmischen Universität Pilsen, Tschechische Republik.

PROF. DR. PETER TAKÁČ, PH.D., INSTITUT FÜR MATHEMATIK, UNIVERSITÄT ROSTOCK,  
ULMENSTRASSE 69, HAUS 3, 18051 ROSTOCK

*Email address:* `peter.takac@uni-rostock.de`