

ABSCHLUSSBERICHT

ÜBER DAS FORSCHUNGSPROJEKT
(DFG-PROJEKT)

MUSTERBILDUNG BEI DER PHASENTRENNUNG IN BESTIMMTEN ELLIPTISCHEN UND PARABOLISCHEN QUASILINEAREN GLEICHUNGEN

PROJEKTLEITER: PROF. DR. PETER TAKÁČ, PH.D.

Die Endphase dieses Forschungsprojektes wurde während des Forschungsfreiemesters im WINTER 2014–2015 von der *Deutschen Forschungsgemeinschaft* (D.F.G.), vom *Deutschen Akademischen Austauschdienst* (D.A.A.D.) und von der *Université de Poitiers* (Laboratoire du CNRS – Mathématiques, Frankreich) finanziell unterstützt.

1. ALLGEMEINE ANGABEN

Förderungszeitraum: 36 Monate; vom 01.09.2011 bis 31.08.2014.

1.1. Projektleiter (verantwortlich für die Durchführung).

Takáč, Peter, Prof. Dr. Ph.D.; Professor (C4) – *Lehrstuhl für Angewandte Analysis*
Institution: Universität Rostock, Institut für Mathematik

Dienstadresse: Institut für Mathematik
Universität Rostock
Ulmenstraße 69, Haus 3
18051 Rostock

Telefon: (0381–) 498–6580 (Büro)
(0381–) 498–6551 (Sekretariat)
Telefax: (0381–) 498–6553
e-mail Adresse: peter.takac@uni-rostock.de

1.2. Thema.

Analytische und numerische Methoden und Spektraltheorie für quasilineare partielle Differentialgleichungen mit dem p -Laplaceoperator:

Vor allem analytische aber auch numerische Methoden für die Untersuchung von Singularitäten und der Musterbildung im z.B. Cahn-Hilliard-Modell mit sehr allgemeiner Energie wurden mit Methoden der *partiellen Differentialgleichungen* und der *Variationsrechnung* untersucht.

Kennwort. Quasilineares Cahn-Hilliard-Modell

1.3. Fachgebiet und Arbeitsrichtung.

Fachgebiet: Angewandte Mathematik

Arbeitsrichtung: partielle Differentialgleichungen und Variationsrechnung

2. ARBEITS- UND ERGEBNISBERICHT ÜBER DIE FORSCHUNG

2.1. Anfangsfragen und Zielsetzung des Projektes.

Dieses Forschungsprojekt hat sich mit der Entwicklung und der Anwendung von Methoden *partieller Differentialgleichungen*, *Variationsrechnung* (elliptische Gleichungen), *dynamischer Systeme* (parabolische Gleichungen) und der *modernen nichtlinearen Funktionalanalysis* (abstrakte Differentialgleichungen) auf verschiedene Probleme beschäftigt, wie z.B. bekannte mathematische Modelle zur Phasentrennung (vor allem das klassische CAHN-HILLIARD-Modell). Das Projektziel war eine möglichst genaue Beschreibung von allen möglichen *stationären Zuständen* und der *Musterbildung* (bei der Phasentrennung) in einem Material mit zwei Phasen mittels vor allem analytischer aber auch numerischer Methoden.

Diese Forschungsprobleme wurden zum Großteil in gemeinsamen Arbeiten mit Herren Prof. Dr. PAVEL DRÁBEK (Westböhmische Universität Pilsen, Tschechien), Prof. Dr. EDUARD FEIREISL (Akademie der Wissenschaften der Tschechischen Republik, Prag) und Prof. Dr. YAVDAT SH. IL'YASOV (Russische Akademie der Wissenschaften, Ufa, Rußland) in den Arbeiten Ref. [[DMT], [I-T], [FPT], [FHPT]] behandelt. Gemeinsame Untersuchungen mehrerer Symmetriefragen wurden in enger Zusammenarbeit mit Herrn Prof. Dr. JEAN-MICHEL RAKOTOSON während des Aufenthaltes des Berichterstatters als Gastprofessor an der

**Université de Poitiers, Frankreich,
22. November, 2014 – 21. Dezember, 2014,**

erstmals durchgeführt und werden in der Zukunft fortgesetzt.

Der Berichterstatter hat einen (1) Monat (22.11.–21.12.2014) aus seinem Forschungsfreiemester “Wintersemester 2014/2015”, **01.10.2014 – 31.03.2014**, an der Université de Poitiers, Frankreich, verbracht. “Université de Poitiers” hat ihm die volle finanzielle Unterstützung für die Zeitspanne von einem (1) Monat gewährleistet.

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen spielen eine wichtige Rolle in der mathematischen Modellierung der Phasentrennung, welche etwa bei der Herstellung von Legierungen zum Einsatz kommt. Bei einer bestimmten kritischen Temperatur ist eine Koexistenz von zwei flüssigen Metallen möglich. Nach einer Temperatursenkung werden die zwei Metallkomponenten getrennt. Die zwei Phasen können ein ziemlich kompliziertes Muster bilden, siehe [[DMT]]. Eine sehr interessante Aufgabe ist es, ein solches Muster sowohl experimentell als auch theoretisch zu untersuchen. Dabei kann sich das Muster bei der kritischen Temperatur räumlich und zeitlich ändern. Für dieses ingenieurwissenschaftliche Problem gibt es zahlreiche mathematische Modelle. Das CAHN-HILLIARD-Modell eignet sich sehr gut nicht nur für rigorose analytische Untersuchungen, sondern auch für numerische Simulationen und Experimente, die man bei praktischer Untersuchung einer Phasentrennung braucht. Ein mathematisch ähnliches Modell, die FISHER-KOLMOGOROV-PETROVSKI-PISCOUNOV-Gleichung, welche in der mathematischen Biologie ihre Wurzeln hat, wurde in den Arbeiten [[FHPT], [Dr-T]] untersucht.

Die wichtigste Aufgabe dieses Forschungsprojektes war eine rigorose mathematisch-analytische und numerische Untersuchung der *Musterbildung* im zwei- und drei-dimensionalen Cahn-Hilliard-Modell für eine Trennung von zwei Phasen. Die zwei Phasen (z.B. Metallkomponenten) befinden sich in einem beschränkten Raumbereich $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 1, 2$ oder 3). Ihr Verhältnis am Ort $x \in \Omega$ zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ wird standardmäßig durch die Funktionen $\frac{1}{2}(1 + u(x, t))$ (der Anteil der Phase 1) und $\frac{1}{2}(1 - u(x, t))$ (der Anteil der Phase 2) beschrieben, wobei natürlich $-1 \leq u(x, t) \leq 1$ gilt. Die unbekannte Funktion $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ (“*Ordnungsparameter*”) erfüllt die sog. CAHN-HILLIARD-Gleichung (siehe [[C-H]]).

Die Kenntnisse und die Technik aus den oben beschriebenen Untersuchungen der CAHN-HILLIARD- und der FISHER-KOLMOGOROV-PETROVSKI-PISCOUNOV-Gleichung wurden weiterhin in den Arbeiten [[T-JFA], [A-T]] zum Zeigen der *Marktvollständigkeit* in der Finanzmathematik erfolgreich angewendet.

LITERATUR

- [C-H]. J. W. CAHN and J. E. HILLIARD, *Free energy of a nonuniform system I, Interfacial free energy*, Journal of Chemical Physics, **28** (1958), 258–267.
- [DMT]. P. DRÁBEK, R. F. MANÁSEVICH, and P. TAKÁČ, *Manifolds of critical points in a quasilinear model for phase transitions*, In D. Bonheure, M. Cuesta, E. J. Lami Dozo, P. Takáč, J. Van Schaftingen, and M. Willem; eds., “*Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations*”, Proceedings of the 2009 “International Workshop in Nonlinear Elliptic PDEs,” A celebration of Jean-Pierre Gossez’s 65-th birthday, September 2–4, 2009, Brussels, Belgium. Contemporary Mathematics, Vol. **540**, pp. 95–134, American Mathematical Society, Providence, R.I., U.S.A., 2011.
- [I-T]. Y. SH. IL’YASOV and P. TAKÁČ, *Optimal $W_{\text{loc}}^{2,2}$ -regularity, Pohozaev’s identity, and nonexistence of weak solutions to some quasilinear elliptic equations*, J. Differential Equations, **252** (2012), 2792–2822. *Online: doi: 10.1016/j.jde.2011.10.020*.
- [FPT]. E. FEIREISL, H. PETZELTOVÁ, and P. TAKÁČ, *Travelling waves in a convection-diffusion equation*, J. Differential Equations, **252** (2012), 2296–2310. *Online: doi: 10.1016/j.jde.2011.07.028*.
- [De-T]. A. DERLET and P. TAKÁČ, *A quasilinear parabolic model for population evolution*, Diff. Equations and Applications, **4**(1) (2012), 121–136.
- [BGT]. J. BENEDIKT, P. GIRG, and P. TAKÁČ, *Perturbation of the p -Laplacian by vanishing nonlinearities (in one dimension)*, Nonlinear Analysis, T.M.A., **75**(8) (2012), 3691–3703. *Online: doi: 10.1016/j.na.2012.01.026*.

- [GST]. J. GIACOMONI, I. SCHINDLER, and P. TAKÁČ, *Régularité höldérienne pour des équations quasi-linéaires elliptiques singulières*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série I, **350** (2012), 383–388. *Online*: <http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2012.04.007>.
- [FHPT]. E. FEIREISL, D. HILHORST, H. PETZELTOVÁ, and P. TAKÁČ, *Front Propagation in Nonlinear Parabolic Equations*, Journal of the London Math. Soc., **90**(2) (2014), 551–572, *Online*: [doi:10.1112/jlms/jdu039](https://doi.org/10.1112/jlms/jdu039).
- [Dr-T]. P. DRÁBEK and P. TAKÁČ, *New patterns of travelling waves in the generalized Fisher-Kolmogorov equation*, NoDEA (Nonlinear Differential Equations and Applications), ?? (2015), ???–???, submitted for publication. *Online – arXiv*: <http://arxiv.org/abs/1502.04808>.
- [B-T]. V. E. BOBKOV and P. TAKÁČ, *A Strong Maximum Principle for parabolic equations with the p -Laplacian*, J. Math. Anal. Appl., **419** (2014), 218–230. *Online*: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.04.054>.
- [T-JFA]. P. TAKÁČ, *Space-time analyticity of weak solutions to linear parabolic systems with variable coefficients*, J. Funct. Anal., **263**(1) (2012), 50–88. *Online*: [doi: 10.1016/j.jfa.2012.04.008](https://doi.org/10.1016/j.jfa.2012.04.008).
- [A-T]. B. ALZIARY and P. TAKÁČ, *Option pricing for stocks with dividends: an analytic approach by PDEs*, Monografías de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza, **38** (2012), 125–136.

2.2. Wissenschaftliche Ergebnisse der Forschung.

Die *Musterbildung* im ein-dimensionalen Cahn-Hilliard-Modell wurde in der Arbeit [1] (gemeinsam mit P. DRÁBEK und R. F. MANÁSEVICH) vollständig beschrieben. Die kugelsymmetrische Musterbildung in einem Euklidischen Raum beliebiger Dimension N hat der Berichterstatter bereits 2009 untersucht.

Für allgemeinere Gebiete in einem zwei- und drei-dimensionalen Euklidischen Raum wurde die Forschungsarbeit fortgesetzt. Der Berichterstatter hat darüber eine gemeinsame Arbeit mit Y. SH. IL'YASOV [2] veröffentlicht. Weitere gemeinsame Arbeiten, die sich mit der Stabilität der Musterbildung in einem Zeit-abhängigen Modell befassen, wurden und werden gemeinsam mit Herrn Prof. Dr. P. DRÁBEK durchgeführt. Eine davon,

New patterns of travelling waves in the generalized Fisher-Kolmogorov equation,
NoDEA (Nonlinear Differential Equations and Applications), *Online – arXiv*:
<http://arxiv.org/abs/1502.04808>,

wurde Ende Januar 2015 zur Veröffentlichung eingereicht und eine weitere steht kurz vor der Fertigstellung. Darüber hinaus sind zu demselben Thema, *Musterbildung in degenerierten oder singulären parabolischen Gleichungen*, weitere Arbeiten zusammen mit V. E. BOBKOV, A. DERLET, P. GIRG und anderen [4, 5, 8] veröffentlicht worden. Regularität der Lösung spielt eine wichtige Rolle bei der Analyse der Musterbildung. Für den Fall eines Systems von stationären elliptischen Gleichungen wurde sie in den Arbeiten [2] und [6] bewiesen.

Die Zusammenarbeit mit den Universitäten von Pau und Toulouse, Südwestfrankreich, wurde in Jahren 2012 und 2013 auch durch ein P.P.P.-Austauschprojekt vom D.A.A.D. finanziell unterstützt. Ebenso wird die Zusammenarbeit mit der Westböhmischen Universität Pilsen, Tschechische Republik, in den Jahren 2014–2015 durch ein P.P.P.-Austauschprojekt vom D.A.A.D. finanziell unterstützt. In den Arbeiten [9, 10] haben wir unsere Kooperation zusätzlich genutzt, um wichtige gegenwärtige Probleme der Finanzmathematik (“vollständige Märkte”) zu behandeln.

Der Projektleiter hat auf Einladung an mehreren deutschen und ausländischen Universitäten Vorträge über seine Arbeiten gehalten:

- (i) vom 01.09.2011 bis zum 31.08.2014: mehrere Vorträge an den Universitäten von *Pau, Toulouse und Poitiers* in Frankreich und *Pilsen und Akademie der Wissenschaften, Prag*, in der Tschechischen Republik;
- (ii) 15.–16.12.2011: “*Workshop on Nonlinear Elliptic PDEs*”, an der Universidad de Granada, Granada, Spanien (als Hauptvortragender);
- (iii) 06.–09.06.2012: *Kongreß “Variational and Topological Methods: Theory, Applications, Numerical Simulations, and Open Problems”* an der Northern Arizona University, Flagstaff, Arizona, U.S.A. (als Hauptvortragender);
- (iv) 04.–06.10.2012: *Kongreß “Differential Equations and Computational Simulations”* an der Mississippi State University, Starkville, Mississippi, U.S.A. (als Hauptvortragender);
- (v) am 26.08.2013: *Kongreß “EQUADIFF 2013”*, Prag, Tschechien (als Organisator einer “Special Session”);
- (vi) 07.–11.07.2014: *Kongreß “Dynamical Systems, Differential Equations and Applications”*, Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, Spanien (als Organisator einer “Special Session”);
- (vii) 14.–15.07.2014: “*Tagung zum 70-ten Geburtstag von Prof. Alfonso Casal*”, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, Spanien (als Hauptvortragender).
- (viii) 23.–25.10.2014: *Kongreß “Differential Equations and Computational Simulations”* an der Mississippi State University, Starkville, Mississippi, U.S.A. (als Hauptvortragender).

2.3. Liste der Publikationen aus diesem Projekt.

Die wissenschaftlichen Ergebnisse aus diesem Projekt wurden (oder werden) in den folgenden Arbeiten veröffentlicht (Sonderdrucke aller acht Arbeiten ([1] – [10]) sind beigefügt):

- [1] P. DRÁBEK, R. F. MANÁSEVICH, and P. TAKÁČ, *Manifolds of critical points in a quasi-linear model for phase transitions*, In D. Bonheure, M. Cuesta, E. J. Lami Dozo, P. Takáč, J. Van Schaftingen, and M. Willem; eds., “*Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations*”, Proceedings of the 2009 “International Workshop in Nonlinear Elliptic PDEs,” A celebration of Jean-Pierre Gossez’s 65-th birthday, September 2–4, 2009, Brussels, Belgium. Contemporary Mathematics, Vol. **540**, pp. 95–134, American Mathematical Society, Providence, R.I., U.S.A., 2011.
- [2] Y. SH. IL’YASOV and P. TAKÁČ, *Optimal $W_{loc}^{2,2}$ -regularity, Pohozaev’s identity, and nonexistence of weak solutions to some quasilinear elliptic equations*, J. Differential Equations, **252** (2012), 2792–2822. *Online:* doi: [10.1016/j.jde.2011.10.020](https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.10.020).
- [3] E. FEIREISL, H. PETZELTOVÁ, and P. TAKÁČ, *Travelling waves in a convection-diffusion equation*, J. Differential Equations, **252** (2012), 2296–2310. *Online:* doi: [10.1016/j.jde.2011.07.028](https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.07.028).

- [4] A. DERLET and P. TAKÁČ, *A quasilinear parabolic model for population evolution*, *Diff. Equations and Applications*, **4**(1) (2012), 121–136.
- [5] J. BENEDIKT, P. GIRG, and P. TAKÁČ, *Perturbation of the p -Laplacian by vanishing nonlinearities (in one dimension)*, *Nonlinear Analysis, T.M.A.*, **75**(8) (2012), 3691–3703. *Online: doi: 10.1016/j.na.2012.01.026.*
- [6] J. GIACOMONI, I. SCHINDLER, and P. TAKÁČ, *Régularité höldérienne pour des équations quasi-linéaires elliptiques singulières*, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série I*, **350** (2012), 383–388. *Online: <http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2012.04.007>.*
- [7] E. FEIREISL, D. HILHORST, H. PETZELTOVÁ, and P. TAKÁČ, *Front Propagation in Nonlinear Parabolic Equations*, *Journal of the London Math. Soc.*, **90**(2) (2014), 551–572, *Online: doi:10.1112/jlms/jdu039.*
- [8] V. E. BOBKOV and P. TAKÁČ, *A Strong Maximum Principle for parabolic equations with the p -Laplacian*, *J. Math. Anal. Appl.*, **419** (2014), 218–230. *Online: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.04.054>.*
- [9] P. TAKÁČ, *Space-time analyticity of weak solutions to linear parabolic systems with variable coefficients*, *J. Funct. Anal.*, **263**(1) (2012), 50–88. *Online: doi: 10.1016/j.jfa.2012.04.008.*
- [10] B. ALZIARY and P. TAKÁČ, *Option pricing for stocks with dividends: an analytic approach by PDEs*, *Monografías de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza*, **38** (2012), 125–136.

Alle bereits veröffentlichten Arbeiten wurden von den Gutachtern hoch bewertet.

3. ZUSAMMENARBEIT MIT ANDEREN WISSENSCHAFTLERN

Außer der *Université de Poitiers* (Prof. JEAN-MICHEL RAKOTOSON, Laboratoire du CNRS – Mathématiques), Frankreich, wurde die Zusammenarbeit mit den folgenden wissenschaftlichen Einrichtungen aufgebaut oder weiterentwickelt:

1. Ohio State University, Columbus, Ohio, U.S.A.: Prof. JAN LANG
2. Mississippi State University, Starkville, U.S.A.: Prof. RATNASINGHAM SHIVAJI
3. Université Toulouse 1 – Capitole, Toulouse, Frankreich:
Prof. BENEDICTE ALZIARY-CHASSAT, Prof. JACQUELINE FLECKINGER-PELLÉ
4. Université de Pau et des Pays de l'Adour, Pau, Frankreich:
Prof. JACQUES GIACOMONI, Prof. GUY VALLET
5. Akademie der Wissenschaften der Tschechischen Republik, Prag, Tschechien:
Prof. EDUARD FEIREISL, Dr. HANA PETZELTOVÁ
6. Westböhmische Universität Pilsen, Tschechien:
Prof. PAVEL DRÁBEK, Doz. PETR GIRG
7. Russische Akademie der Wissenschaften, Ufa, Rußland:
Prof. YAVDAT SH. IL'YASOV, Dr. VLADIMIR E. BOBKOV

4. DOKTORANDENAUSBILDUNG

Während der Dauer des Forschungsprojektes hat der Projektleiter zwei Doktoranden betreut, Herren Dipl.-Math. CARSTEN ERDMANN und Dipl.-Math. FALKO BAUSTIAN (Universität Rostock), und einen weiteren mitbetreut, Herrn Dipl.-Math. LUKÁŠ KOTRLA (Westböhmische Universität Pilsen, Tschechien). Herr ERDMANN hat im Februar 2013 an der Universität Rostock promoviert und arbeitet seitdem bei der Deutschen Bundesbank in Frankfurt am Main. Herr BAUSTIAN steht kurz vor der Promotion (voraussichtlich Anfang 2016). Herrn KOTRLA habe ich im Rahmen eines DAAD-Austauschprogrammes (PPP) mit der Westböhmischen Universität Pilsen zusammen mit Herrn Doz. PETR GIRG mitbetreut; seine Promotion ist für 2017 vorgesehen. Darüber hinaus hat sich am Lehrstuhl des Projektleiters Herr Dr. JOCHEN MERKER im Juli 2012 habilitiert und kurz danach eine W2-Professur zuerst an der Fachhochschule Stralsund und danach an der Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur (HTWK) in Leipzig erhalten.

5. BERICHT ÜBER REISEN

Der Zeitraum 01.09.2011 – 31.12.2014

(a) *Reise zwischen Rostock und Toulouse, Frankreich:*

01.09.2011 – 30.09.2011

(b) *Dreiwöchiger Aufenthalt von Prof. Jacques Giacomoni (Pau) in Rostock:*

10.01.2012 – 31.01.2012

(c) *Reise zwischen Rostock und Pilsen, Tschechien:*

01.03.2012 – 31.03.2012

(d) *Reise zwischen Rostock und Flagstaff, U.S.A.:*

05.06.2012 – 10.06.2012

(e) *Reise zwischen Rostock und Pilsen, Tschechien:*

01.11.2012 – 08.11.2012

(f) *Reise zwischen Rostock und Toulouse, Frankreich:*

01.02.2014 – 28.02.2014

(g) *Reise zwischen Rostock und Toulouse, Frankreich:*

01.09.2014 – 30.09.2014

(h) *Reise zwischen Rostock und Columbus, Ohio, U.S.A.:*

11.10.2014 – 31.10.2014

Die Komplexität der Aufgabenstellung (und der daraus folgende Umfang des Arbeitsprogrammes) machte es zwingend notwendig, auf internationaler Ebene zu kooperieren und die Forschungsergebnisse auf Kongressen einem internationalem Publikum vorzustellen und mit anderen Wissenschaftlern zu diskutieren. Dies geschah bei den folgenden vier Kongressen:

- *“Variational and Topological Methods: Theory, Applications, Numerical Simulations, and Open Problems”*
(invited speaker) during June 06–09, 2012

organisiert von der Northern Arizona University, Flagstaff, Arizona, U.S.A.

- *“Differential Equations and Computational Simulations”*
(invited speaker) during October 04–06, 2012

organisiert von der Mississippi State University, Starkville, Mississippi, U.S.A.

- Kongreß *“EQUADIFF 2013”*
(a “special session” organiser) during August 26–30, 2013

organisiert von der Akademie der Wissenschaften der Tschechischen Republik, Prag, Tschechien.

- *“Differential Equations and Computational Simulations”*
(invited speaker) during October 23–25, 2014

organisiert von der Mississippi State University, Starkville, Mississippi, U.S.A.

Beim letzten Kongreß in den U.S.A. wurde über die neuen Ergebnisse aus der Arbeit [9] berichtet.

6. ZUSAMMENFASSUNG (1 DIN A4-SEITE)

Das Forschungsprojekt hat sich mit der Entwicklung und den Anwendungen der *nichtlinearen Funktionalanalysis, Variationsrechnung, partieller Differentialgleichungen* und *dynamischer Systeme* auf allgemein anerkannte mathematische Modelle für Phasentrennung von “CAHN-HILLIARD” und “FISHER-KOLMOGOROV-PETROVSKI-PISCOUNOV” bei verschwindender Diffusion befaßt. Das Projektziel war eine möglichst genaue Beschreibung von Teilgebieten mit nur einer der zwei Phasen und der Musterbildung in einem Material mit zwei Phasen bzw. in einem Gebiet mit zwei Populationen mittels vor allem analytischer aber auch numerischer Methoden.

Die Forschung des Projektleiters hat sich zum Großteil auf die Bildung von Teilgebieten mit nur einer der zwei Phasen konzentriert. Dafür wurden geeignete analytische Methoden für die Existenz, Nichteindeutigkeit und Regularität der schwachen Lösungen entwickelt. Räumlich *periodische* und *aperiodische* Musterbildung ist sowohl analytisch (in Raumdimension Eins und für kugelsymmetrische Lösungen) als auch mittels numerischer Methoden nachgewiesen worden. Der *wichtigste Vorteil* dieser neuen Methoden ist, daß sie auf eine sehr breite Klasse von singulären oder degenerierten elliptischen partiellen Differentialgleichungen angewendet werden können, wie z.B. “*doubly nonlinear, singular or degenerate elliptic problems*”, welche bei zahlreichen Untersuchungen von verschiedenen Materialien vorkommen. Sie beruhen auf den modernsten Ergebnissen (aus den letzten fünf Jahren) über mehrere Arten der starken Maximum- und Vergleichsprinzipien für quasilineare partielle Differentialgleichungen und der Identität von “*Pohozaev-Pucci-Serrin*”. Diese Identität gewährleistet wichtige Aussagen über Nichtexistenz bestimmter Lösungen.

Auf der anderen Seite weist eine breite Klasse von singulären oder degenerierten parabolischen partiellen Differentialgleichungen *fortschreitende Wellen* (sog. “*travelling waves*”) auf. Als typisches Beispiel können wir eine reaktive Diffusionsgleichung mit dem p -Laplaceoperator Δ_p und einer möglicherweise nur Hölder-stetiger Reaktionsfunktion erwähnen. Solche fortschreitende Wellen bilden z.B. die scharfe Grenze zwischen zwei konkurrierenden Populationen, die sich mit der Zeit bewegt, oder die Mitte eines unscharfen Grenzgebietes zwischen zwei konkurrierenden Populationen, die sich ebenso mit der Zeit bewegt. In mehreren Arbeiten hat der Projektleiter nachgewiesen, daß vor allem die degenerierte Diffusion (dargestellt durch den p -Laplaceoperator Δ_p mit $p > 2$) dazu führen kann, daß das Gebiet, in dem beide konkurrierende Populationen existieren, räumlich beschränkt ist, obwohl dies für $p = 2$ nicht der Fall ist.

Der Projektleiter hat sein Forschungsfreisemester “Wintersemester 2014/2015”, 01.10.2014 – 31.03.2015, zum Teil an der *Université de Poitiers* (Laboratoire du CNRS –

Mathématiques), Frankreich, verbracht (vom 22.11.2014 bis zum 21.12.2014). Gemeinsame Untersuchungen mehrerer Symmetriefragen wurden in Zusammenarbeit mit Herrn Prof. Dr. JEAN-MICHEL RAKOTOSON durchgeführt.

PROF. DR. PETER TAKÁČ, PH.D., INSTITUT FÜR MATHEMATIK, UNIVERSITÄT ROSTOCK,
ULMENSTRASSE 69, HAUS 3, 18051 ROSTOCK

Email address: `peter.takac@uni-rostock.de`