

# ABSCHLUSSBERICHT

ÜBER DAS FORSCHUNGSPROJEKT  
(DFG-PROJEKT)

## STARKE MAXIMUM- UND VERGLEICHSPRINZIPIEN FÜR DEGENERIERTE UND SINGULÄRE PARABOLISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

( *STRONG MAXIMUM AND COMPARISON PRINCIPLES  
FOR DEGENERATE AND SINGULAR PARABOLIC EQUATIONS* )

**PROJEKTLEITER:** PROF. DR. PETER TAKÁČ, PH.D.

Die mittlere Phase dieses Forschungsprojektes wurde während des Forschungsfreisemesters im WINTER 2014–2015 von der *Deutschen Forschungsgemeinschaft* (D.F.G.), vom *Deutschen Akademischen Austauschdienst* (D.A.A.D.) und von der *Université de Poitiers* (Laboratoire du CNRS – Mathématiques, Frankreich) finanziell unterstützt.

Die Endphase im AKADEMISCHEN JAHR 2015–2016 wurde auch vom europäischen Exzellenz-Forschungszentrum “N.T.I.S.” an der *Westböhmischen Universität Pilsen, Tschechische Republik*, finanziell unterstützt.

### 1. ALLGEMEINE ANGABEN

**Förderungszeitraum:** 36 Monate; vom 01.08.2013 bis 31.07.2014, verlängert bis zum 31.07.2016 (ohne zusätzliche Kosten). Abschlußbericht erwartet zum 01.10.2016 .

#### 1.1. Projektleiter (verantwortlich für die Durchführung).

Takáč, Peter, Prof. Dr. Ph.D.; Professor (C4) – *Lehrstuhl für Angewandte Analysis*  
Institution: Universität Rostock, Institut für Mathematik

Dienstadresse: Institut für Mathematik  
Universität Rostock  
Ulmenstraße 69, Haus 3  
18051 Rostock

Telefon: (0381–) 498–6580 (Büro)  
(0381–) 498–6551 (Sekretariat)

Telefax: (0381–) 498–6553

e-mail Adresse: peter.takac@uni-rostock.de

## 1.2. Thema.

### *Analytische Untersuchung der Gültigkeit starker Maximum- und Vergleichsprinzipien für degenerierte und singuläre quasilineare parabolische Differentialgleichungen:*

Vor allem wurden Maximumprinzipien, Vergleichsprinzipien, Diffusion mit dem  $p$ -Laplaceoperator, degenerierte und singuläre parabolische Differentialgleichungen mit Methoden der *partiellen Differentialgleichungen* und der *Variationsrechnung* untersucht.

### **Kennwort. Quasilineare Diffusion mit dem $p$ -Laplaceoperator**

## 1.3. Fachgebiet und Arbeitsrichtung.

*Fachgebiet:* Angewandte Mathematik

*Arbeitsrichtung:* quasilineare partielle Differentialgleichungen vom elliptischen und parabolischen Typ mit dem  $p$ -Laplaceoperator

## 2. ARBEITS- UND ERGEBNISBERICHT ÜBER DIE FORSCHUNG

### 2.1. Anfangsfragen und Zielsetzung des Projektes.

Das Forschungsprojekt hat sich mit der Frage beschäftigt, in wie weit starke Maximum- und Vergleichsprinzipien für degenerierte und singuläre nichtlineare parabolische partielle Differentialgleichungen Gültigkeit besitzen. Während diese Frage für nichtlineare elliptische partielle Differentialgleichungen zumindest ansatzweise geklärt ist (CUESTA und TAKÁČ [[CT-1], [CT-2]], (PUCCI und SERRIN [[P-S]]), bleibt sie im parabolischen Fall noch weitgehend offen. Eng verbunden mit der Frage nach der Gültigkeit starker Maximum- und Vergleichsprinzipien sind auch das Prinzip vom kompakten Träger, Harnack-Ungleichungen, “dead core” Lösungen sowie die Eindeutigkeit und Regularität von Lösungen. Die Forschungsaktivität hat sich vor allem auf das Hopfsche Maximum- und Vergleichsprinzip für degenerierte und singuläre nichtlineare parabolische partielle Differentialgleichungen konzentriert und dabei verschiedenste Methoden aus den Bereichen *partielle Differentialgleichungen*, *Variationsrechnung* und *nichtlineare Funktionalanalysis* angewendet und weiterentwickelt; siehe [[BT-1], [BBGKT], [BGKT-1], [BGKT-2]].

Diese Forschungsprobleme wurden zum Großteil in gemeinsamen Arbeiten mit Herrn Dr. VLADIMIR E. BOBKOV (Russische Akademie der Wissenschaften, Ufa, Rußland), mit Herren Doz. Dr. PETR GIRG, Dr. JIŘÍ BENEDIKT und Ing. Lukáš Kotrla (Westböhmisches Universität Pilsen, Tschechien) in den Arbeiten Ref. [[BBGKT], [BGKT-1], [BGKT-2], [BT-1], [BT-2]] behandelt. Weitere verwandte Aufgaben, wie z.B. zur Frage der Existenz und Eindeutigkeit einer *Wanderwelle* in degenerierten oder singulären nichtlinearen parabolischen partiellen Differentialgleichungen, wurden mit Herrn Prof. Dr. EDUARD FEIREISL und Frau Dr. HANA PETZELTOVÁ (Akademie der Wissenschaften der Tschechischen Republik, Prag) und mit Herrn Prof. Dr. PAVEL DRÁBEK (Westböhmisches Universität Pilsen, Tschechien) gemeinsam behandelt; siehe

Arbeiten Ref. [[FHPT-1], [FHPT-2]] bzw. [[DT-1], [DT-2]]. Gemeinsame Untersuchungen mehrerer Symmetriefragen mittels starker Maximum- und Vergleichsprinzipien wurden in enger Zusammenarbeit mit Herrn Prof. Dr. JEAN-MICHEL RAKOTOSON während des Aufenthaltes des Projektleiter als Gastprofessor an der

**Université de Poitiers, Frankreich,  
22. November, 2014 – 21. Dezember, 2014,**

erstmals durchgeführt und werden in der Zukunft fortgesetzt.

Der Projektleiter hat einen (1) Monat (22.11.–21.12.2014) aus seinem Forschungsfreisemester “Wintersemester 2014/2015”, **01.10.2014 – 31.03.2014**, an der Université de Poitiers, Frankreich, verbracht. “Université de Poitiers” hat ihm die volle Ausstattung und finanzielle Unterstützung für die Zeitspanne von einem (1) Monat gewährleistet.

Degenerierte und/oder singuläre nichtlineare partielle Differentialgleichungen spielen eine wichtige Rolle in der mathematischen Modellierung in der Physik, Biologie und auch in der Materialwissenschaft. Im Falle der degenerierten Diffusion (der  $p$ -Laplace-operator mit  $2 < p < \infty$ ) und einer bei Null nicht glatten reaktiven Funktion haben wir in der Arbeit [[BGKT-1]] schwache, stetig differenzierbare Lösungen konstruiert, welche den Anfangswert (in der Zeit  $t = 0$ ) identisch gleich Null haben und danach eine nichtnegative Lösung mit räumlich kompaktem Träger mit einer vorgeschriebenen Anzahl von Zusammengangs-komponenten. Solche Lösungen verwenden wir als Gegenbeispiele zum starken Maximumprinzip.

Die wichtigste Aufgabe dieses Forschungsprojektes war detaillierte Untersuchung der Gültigkeit der *starken Maximum- und Vergleichsprinzipien* für degenerierte und singuläre parabolische Differentialgleichungen, sowohl analytisch als auch numerisch, und ihr Einfluß auf die **Musterbildung** im ein-, zwei- und drei-dimensionalen reaktiven Diffusionsgleichungen mit dem  $p$ -Laplace-operator ( $1 < p < \infty$ ) und einer *bei Null nicht glatten* reaktiven Funktion und die Wechselwirkung zwischen solcher Diffusion und Reaktion [[BGKT-1], [BGKT-2]]. Ähnliche Methoden wurden auch bei der Untersuchung von Wanderwellen in der FISHER-KOLMOGOROV-PETROVSKI-PISCOUNOV-Gleichung [[DT-1], [DT-2]] angewendet. In der Arbeit mit P. DRÁBEK [[DT-2]] wurde u.a. gezeigt, daß *genetische Veränderlichkeit* ein “dynamisches” Ereignis ist: Sie bleibt nur in einem Lebensraum erhalten, der sich in unserem Modell mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

#### LITERATUR

- [CT-1]. M. CUESTA and P. TAKÁČ, *A strong comparison principle for the Dirichlet  $p$ -Laplacian*, in “Proceedings of the Conference on Reaction-Diffusion Equations”, G. Caristi, E. Mitidieri, eds., Trieste, Italy, October 1995; Lecture Notes in Pure and Applied Math. 194, 79–87. Marcel Dekker, Inc., 1998.
- [CT-2]. M. CUESTA and P. TAKÁČ, *A strong comparison principle for positive solutions of degenerate elliptic equations*, Differential and Integral Equations, **13**(4–6) (2000), 721–746.
- [P-S]. P. PUCCI and J. SERRIN, “*The Maximum Principle*”, Birkhäuser-Verlag, Basel-Boston, 2007.
- [BT-1]. V. E. BOBKOV and P. TAKÁČ, *A Strong Maximum Principle for parabolic equations with the  $p$ -Laplacian*, J. Math. Anal. Appl., **419** (2014), 218–230. *Online*: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.04.054>.
- [BBGKT]. J. BENEDIKT, V. E. BOBKOV, P. GIRG, L. KOTRLA, and P. TAKÁČ, *Nonuniqueness of solutions of initial value problems for parabolic  $p$ -Laplacian*, Electronic J. Diff. Equations, **2015**(38) (2015), 1–7. *Online*: [URL: http://ejde.math.txstate.edu](http://ejde.math.txstate.edu).

- [BGKT-1]. J. BENEDIKT, P. GIRG, L. KOTRLA, and P. TAKÁČ, *Nonuniqueness and multi-bump solutions in parabolic problems with the  $p$ -Laplacian*, J. Differential Equations, **260** (2016), 991–1009. *Online:* doi: [10.1016/j.jde.2015.09.015](https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.09.015).
- [BGKT-2]. J. BENEDIKT, P. GIRG, L. KOTRLA, and P. TAKÁČ, *The strong maximum principle in parabolic problems with the  $p$ -Laplacian in a domain*, Appl. Math. Letters, **63** (2017), 95–101. *Online:* <http://dx.doi.org/10.1016/j.aml.2016.07.017>.
- [BT-2]. V. E. BOBKOV and P. TAKÁČ, *On maximum and comparison principles for parabolic problems with the  $p$ -Laplacian*, in preparation.
- [DT-1]. P. DRÁBEK and P. TAKÁČ, *New patterns of travelling waves in the generalized Fisher-Kolmogorov equation*, Nonlinear Differ. Equ. Appl. (NoDEA), **23** (2016), Article 7. *Online:* doi: [10.1007/s00030-016-0365-2](https://doi.org/10.1007/s00030-016-0365-2).
- [DT-2]. P. DRÁBEK and P. TAKÁČ, *Convergence to travelling waves in Fisher’s population genetics model with a non-Lipschitzian reaction term*, J. Math. Biology, ??(?) (2017), ???–???. *Online:* doi: [10.1007/s00285-017-1103-z](https://doi.org/10.1007/s00285-017-1103-z), accepted for publication.
- [FHPT-1]. E. FEIREISL, D. HILHORST, H. PETZELTOVÁ, and P. TAKÁČ, *Front Propagation in Nonlinear Parabolic Equations*, Journal of the London Math. Soc., **90**(2) (2014), 551–572, *Online:* doi:[10.1112/jlms/jdu039](https://doi.org/10.1112/jlms/jdu039).
- [FHPT-2]. E. FEIREISL, D. HILHORST, H. PETZELTOVÁ, and P. TAKÁČ, *Mathematical analysis of variable density flows in porous media*, J. Evolution Equations, **16**(1) (2016), 1–19. *Online:* doi: [10.1007/s00028-015-0290-6](https://doi.org/10.1007/s00028-015-0290-6).
- [F]. R. A. FISHER, *The wave of advance of advantageous genes*, Ann. of Eugenics, **7** (1937), 355–369.
- [KPP]. A. N. KOLMOGOROFF, I. G. PETROVSKY, and N. S. PISCOUNOFF, *Étude de l’équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique*, Bulletin Université d’État à Moscou (Bjul. Moskowskogo Gos. Univ.), Série internationale, section A, **1** (1937), 1–25.

## 2.2. Wissenschaftliche Ergebnisse der Forschung.

Im Antrag wurde eine halbe Doktoranden-Stelle für ein Jahr (12 Monate) ursprünglich für Herrn MATTHIAS KRÜGER, M.Sc., beantragt. Da Herr KRÜGER die Universität Rostock verlassen hat und sich für eine Doktoranden-Stelle an der Universität Göttingen entschieden hat, mußte ein anderer Doktorand gefunden werden. Herr VLADIMIR E. BOBKOV war zu der Zeit Doktorand an der Russischen Akademie der Wissenschaften in Ufa, der sich mit eng verwandter Problematik bei Herrn Prof. YAVDAT SH. IL’YASOV beschäftigt hat. Herr BOBKOV kam an die Universität Rostock für ein Jahr im August 2013. Aus der engen Zusammenarbeit zwischen Herrn BOBKOV und dem Projektleiter sind drei gemeinsame wissenschaftliche Arbeiten entstanden [[BBGKT], [BT-1], [BT-2]]. Die ersten zwei davon wurden bereits in namhaften internationalen Zeitschriften veröffentlicht (Electronic J. Diff. Equations und J. Math. Anal. Appl.) und die dritte steht kurz vor der Fertigstellung. Sowohl Herr BOBKOV als auch der Projektleiter haben über ihre neue Forschungsergebnisse bei mehreren internationalen Tagungen, Kongressen und Workshops berichtet, z.B. beim

07.–11.07.2014: *AIMS Kongreß on “Dynamical Systems, Differential Equations, and Applications”*,  
Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, Spanien  
(als Organisator einer “Special Session”).

Die Arbeit von Herrn BOBKOV wurde unter den drei besten studentischen Arbeiten ausgezeichnet. Ihre Forschungsergebnisse werden bald in [[BT-2]] veröffentlicht. Zur Zeit arbeitet er im europäischen Exzellenz-Forschungszentrum “N.T.I.S.” an der *Westböhmischen Universität Pilsen*, wo er seine Forschung aus der Universität Rostock fortsetzt und weiterentwickelt.

Die *Musterbildung* in der ein-dimensionalen Fisher-Kolmogorov equation [[KPP]] die hier als *Wanderwelle* erscheint, wurde in der Arbeit [6] (gemeinsam mit P. DRÁBEK) vollständig beschrieben. In der darauffolgenden Arbeit [11] (auch gemeinsam mit P. DRÁBEK) wurde Konvergenz zu einer bestimmten Wanderwelle gezeigt und zwar im Fisher-Modell für die Populationsgenetik [[F]]. Die “biologische” Bedeutung dieses rein mathematischen Ergebnisses besteht darin, daß *genetische Vielfalt ausschließlich in einem wandernden Lebensraum erhalten bleibt; folglich ist sie ein “dynamisches” Phänomen.* Der “Lebensraum” ist ein kompaktes Intervall  $[z_0 + ct, z_1 + ct] \subset \mathbb{R}$ , das mit der Geschwindigkeit  $c > 0$  von links nach rechts wandert.

Weitere gemeinsame Arbeiten, die sich mit der Stabilität der Musterbildung in einem Zeit-abhängigen Modell befassen, wurden und werden gemeinsam mit Herrn Prof. Dr. P. DRÁBEK durchgeführt. Eine davon,

*New patterns of travelling waves in the generalized Fisher-Kolmogorov equation*,  
Nonlinear Differ. Equ. Appl. (NoDEA), **23** (2016), Article 7. [Online:](#)  
[doi: 10.1007/s00030-016-0365-2](https://doi.org/10.1007/s00030-016-0365-2).

wurde bereits veröffentlicht und auch eine weitere,

*Convergence to travelling waves in Fisher’s population genetics model with a non-Lipschitzian reaction term*, J. Math. Biology, ??(?) (2017), ???–???. [Online:](#)  
[doi: 10.1007/s00285-017-1103-z](https://doi.org/10.1007/s00285-017-1103-z), accepted for publication.

wurde angenommen zur Veröffentlichung. Darüber hinaus sind zu demselben Thema, *Musterbildung in degenerierten oder singulären parabolischen Gleichungen*, weitere Arbeiten zusammen mit V. E. BOBKOV, J. BENEDIKT, P. GIRG, L. KOTRLA und anderen [1–5, 7, 8] veröffentlicht worden. Regularität der Lösung spielt eine wichtige Rolle bei der Analyse der Musterbildung. Für den Fall eines Systems von stationären elliptischen Gleichungen wurde sie in der Arbeit [10] bewiesen.

Die Zusammenarbeit mit der Westböhmischen Universität Pilsen, Tschechische Republik, wurde in den Jahren 2014–2015 durch ein P.P.P.-Austauschprojekt vom D.A.A.D. finanziell unterstützt. Zum Teil sind aus dieser Kooperation auch die gemeinsamen Arbeiten [3–6, 11] entstanden.

Der Projektleiter hat **auf Einladung** an mehreren deutschen und ausländischen Universitäten Vorträge über seine Arbeiten gehalten:

- (i) vom 01.09.2013 bis zum 31.08.2016: mehrere Vorträge an den Universitäten von *Toulouse, Poitiers und Pau* in Frankreich und *Pilsen und Akademie der Wissenschaften, Prag*, in der Tschechischen Republik;
- (ii) am 26.08.2013: *Kongreß “EQUADIFF 2013”*, Prag, Tschechische Republik (als Organisator einer “Special Session”);
- (iii) 07.–11.07.2014: *A.I.M.S. Kongreß on “Dynamical Systems, Differential Equations, and Applications”*, Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, Spanien (als Organisator einer “Special Session”);

- (iv) 14.–15.07.2014: *“Tagung zum 70-ten Geburtstag von Prof. Alfonso Casal”*,  
Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, Spanien (als Hauptvortragender);
- (v) 15.–18.09.2014: *Kongreß – Universities of Pau and Zaragoza: “Applied Mathematics and Statistics”*, Universidad de Zaragoza, Jaca, Spanien (als Hauptvortragender);
- (vi) am 14.10.2014: *Vortrag im Department of Mathematics*  
an der Northern Arizona State University, Flagstaff, Arizona, U.S.A.;
- (vii) am 21.10.2014: *Vortrag im Department of Mathematics*  
an der Ohio State University, Columbus, Ohio, U.S.A.;
- (viii) 23.–25.10.2014: *Kongreß “Differential Equations and Computational Simulations”*  
an der Mississippi State University, Starkville, Mississippi, U.S.A.  
(als Hauptvortragender);
- (ix) am 12.11.2014: *Vortrag* am Institut für Mathematik der Universität Bielefeld;
- (x) 13.01.2015: *Vortrag* am Institut für Mathematik der Akademie der Wissenschaften  
der Tschechischen Republik;
- (xi) 22.01.2015: *Vortrag* am Institut für Mathematik der Westböhmischen Universität Pilsen,  
Tschechien;
- (xii) am 23.02.2016: *Vortrag im Department of Mathematics*  
an der Ohio State University, Columbus, Ohio, U.S.A.;
- (xiii) 01.–05.07.2016: *A.I.M.S. Kongreß on “Dynamical Systems, Differential Equations  
and Applications”*, Orlando, Florida, U.S.A.  
(als Vortragender in einer “Special Session”);
- (xiv) 12.–15.09.2016: *Kongreß – Universities of Pau and Zaragoza: “Applied Mathematics  
and Statistics”*, Universidad de Zaragoza, Jaca, Spanien  
(als Organisator einer “Special Session”).

### 2.3. Liste der Publikationen aus diesem Projekt.

Die wissenschaftlichen Ergebnisse aus diesem Projekt wurden (oder werden) in den folgenden Arbeiten veröffentlicht (Sonderdrucke aller zehn bereits erschienenen Arbeiten ([1] – [10]) sind beigefügt):

- [1] V. E. BOBKOV and P. TAKÁČ, *A Strong Maximum Principle for parabolic equations with the  $p$ -Laplacian*, J. Math. Anal. Appl., **419** (2014), 218–230. *Online:* <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.04.054>.
- [2] V. E. BOBKOV and P. TAKÁČ, *On maximum and comparison principles for parabolic problems with the  $p$ -Laplacian*, in preparation.
- [3] J. BENEDIKT, V. E. BOBKOV, P. GIRG, L. KOTRLA, and P. TAKÁČ, *Nonuniqueness of solutions of initial value problems for parabolic  $p$ -Laplacian*, Electronic J. Diff. Equations, **2015**(38) (2015), 1–7. *Online:* URL: <http://ejde.math.txstate.edu>.
- [4] J. BENEDIKT, P. GIRG, L. KOTRLA, and P. TAKÁČ, *Nonuniqueness and multi-bump solutions in parabolic problems with the  $p$ -Laplacian*, J. Differential Equations, **260** (2016), 991–1009. *Online:* doi: [10.1016/j.jde.2015.09.015](https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.09.015).

- [5] J. BENEDIKT, P. GIRG, L. KOTRLA, and P. TAKÁČ, *The strong maximum principle in parabolic problems with the  $p$ -Laplacian in a domain*, Appl. Math. Letters, **63** (2017), 95–101. *Online:* <http://dx.doi.org/10.1016/j.aml.2016.07.017>.
- [6] P. DRÁBEK and P. TAKÁČ, *New patterns of travelling waves in the generalized Fisher-Kolmogorov equation*, Nonlinear Differ. Equ. Appl. (NoDEA), **23** (2016), Article 7. *Online:* doi: 10.1007/s00030-016-0365-2.
- [7] E. FEIREISL, D. HILHORST, H. PETZELTOVÁ, and P. TAKÁČ, *Front Propagation in Nonlinear Parabolic Equations*, Journal of the London Math. Soc., **90**(2) (2014), 551–572, *Online:* doi:10.1112/jlms/jdu039.
- [8] E. FEIREISL, D. HILHORST, H. PETZELTOVÁ, and P. TAKÁČ, *Mathematical analysis of variable density flows in porous media*, J. Evolution Equations, **16**(1) (2016), 1–19. *Online:* doi: 10.1007/s00028-015-0290-6.
- [9] B. BOUGHERARA, J. GIACOMONI, and P. TAKÁČ, *Bounded solutions to a quasilinear and singular parabolic equation with  $p$ -Laplacian*, Nonlinear Analysis, T.M.A., **119** (2015), 254–274. *Online:* <http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2014.10.010>.
- [10] J. GIACOMONI, I. SCHINDLER, and P. TAKÁČ, *Singular quasilinear elliptic systems and Hölder regularity*, Advances in Differential Equations, **20**(3–4) (2015), 259–298. *Online:* <http://projecteuclid.org/euclid.ade/1423055202>.
- [11] P. DRÁBEK and P. TAKÁČ, *Convergence to travelling waves in Fisher’s population genetics model with a non-Lipschitzian reaction term*, J. Math. Biology, ??(?) (2017), ???–???. *Online:* doi: 10.1007/s00285-017-1103-z, accepted for publication.
- [12] B. ALZIARY and P. TAKÁČ, *On the Heston model with stochastic volatility: analytic solutions and complete markets*, Mathematics and Financial Economics, ??(?) (2017), ???–???, under review.
- [13] F. BAUSTIAN and P. TAKÁČ, *Space-time analyticity of weak solutions to semilinear parabolic systems with variable coefficients*, in preparation.

Alle bereits veröffentlichten Arbeiten wurden von den Gutachtern hoch bewertet.

#### 2.4. Geplante und denkbare Folgeuntersuchungen.

Sowohl das *schwache* als auch das *starke Maximum-* und *Vergleichsprinzipien* sind für degenerierte oder singuläre parabolische Gleichungen wesentlich komplizierter als auch für ihre stationären Fälle – elliptische Randwertaufgaben. Der Projektleiter und seine Kollegen, Herren Dipl.-Math. FALKO BAUSTIAN (Universität Rostock), Dr. VLADIMIR E. BOBKOV (N.T.I.S. Pilsen, Tschechien), Dr. JIŘÍ BENEDIKT, Doz. PETR GIRG, Ing. LUKÁŠ KOTRLA, Prof. PAVEL DRÁBEK (Westböhmisches Universität Pilsen, Tschechien), Prof. EDUARD FEIREISL und Frau Dr. HANA PETZELTOVÁ (Akademie der Wissenschaften der Tschechischen Republik, Prag, Tschechien), werden ihre Forschung zu diesem Thema auf wichtigen Spezialfällen fortgesetzt, die von signifikanter Bedeutung in Anwendungen sind, wie z.B. der Vergleich zwischen einer zeitabhängiger Lösung einer autonomen parabolischen Gleichung und einer stationären Lösung derselben Gleichung (der “elliptische” Fall). Dieses Szenario entsteht z.B. beim Beweis der Konvergenz einer zeitabhängiger Lösung (Trajektorie) gegen eine stationäre Lösung (Gleichgewichtspunkt). Diese Forschung soll den Arbeiten [1 - 8, 11] folgen.

### 3. ZUSAMMENARBEIT MIT ANDEREN WISSENSCHAFTLERN

Außer der *Université de Poitiers, Frankreich* (Prof. JEAN-MICHEL RAKOTOSON, Laboratoire du CNRS – Mathématiques), wurde die Zusammenarbeit mit den folgenden wissenschaftlichen Einrichtungen aufgebaut oder weiterentwickelt:

1. Europäisches Exzellenz-Forschungszentrum “N.T.I.S.” Pilsen, Tschechien, und Westböhmisches Universität Pilsen, Tschechien:  
Prof. PAVEL DRÁBEK, Doz. PETR GIRG, Dr. VLADIMIR E. BOBKOV
2. Ohio State University, Columbus, Ohio, U.S.A.:  
Prof. JAN LANG
3. Russische Akademie der Wissenschaften, Ufa, Rußland:  
Prof. YAVDAT SH. IL'YASOV, Dr. VLADIMIR E. BOBKOV
4. Université Toulouse 1 – Capitole, Toulouse, Frankreich:  
Prof. BENEDICTE ALZIARY-CHASSAT, Prof. JACQUELINE FLECKINGER-PELLÉ
5. Akademie der Wissenschaften der Tschechischen Republik, Prag, Tschechien:  
Prof. EDUARD FEIREISL, Dr. HANA PETZELTOVÁ
6. University of North Carolina, Greensboro, N.C., U.S.A.:  
Prof. RATNASINGHAM SHIVAJI, Prof. MAYA CHHETRI
7. Université de Pau et des Pays de l'Adour, Pau, Frankreich:  
Prof. JACQUES GIACOMONI, Prof. GUY VALLET



#### 4. DOKTORANDENAUSBILDUNG

Während der Dauer des Forschungsprojektes hat der Projektleiter zwei Doktoranden betreut, Herrn Dipl.-Math. FALKO BAUSTIAN (Universität Rostock) und Herrn Dipl.-Math. VLADIMIR E. BOBKOV, der von diesem DFG-Projekt ein Jahr unterstützt wurde. Mit Herrn V. E. BOBKOV hat der Projektleiter zwei gemeinsame Artikel [1, 3] bereits veröffentlicht und ein weiterer gemeinsamer Artikel [2] steht kurz vor der Fertigstellung. Herr V. E. BOBKOV hat seine Dissertation im Mai 2015 bei der Russischen Akademie der Wissenschaften, Ufa, Rußland, erfolgreich verteidigt. Er arbeitet z.Z. als Postdoktorand am europäischen Exzellenz-Forschungszentrum “N.T.I.S.” an der *Westböhmischen Universität Pilsen* in der Tschechischen Republik. Herr Dipl.-Math. FALKO BAUSTIAN hat seine Dissertation im Januar 2017 an der Universität Rostock erfolgreich verteidigt. Er arbeitet z.Z. als Postdoktorand an der Universität Rostock mit dem Ziel, in absehbarer Zeit seine Habilitation zu erreichen. Die gemeinsame Arbeit des Projektleiters mit Herrn Dipl.-Math. F. BAUSTIAN [13] wird demnächst fertiggestellt und veröffentlicht.

Der Projektleiter hat noch einen weiteren Doktoranden mitbetreut, Herrn Dipl.-Ing. LUKÁŠ KOTRLA (Westböhmische Universität Pilsen, Tschechien). Dabei hat uns auch ein Forschungsprojekt im Rahmen eines DAAD-Austauschprogrammes (PPP) mit der Westböhmischen Universität Pilsen zusammen mit Herrn Doz. PETR GIRG wesentlich geholfen. Es wird erwartet, daß Herr Ing. L. KOTRLA sein Doktoratsstudium spätestens im Jahre 2018 erfolgreich abschließt. Mit Herrn Ing. L. KOTRLA hat der Projektleiter bereits zwei gemeinsame wissenschaftliche Artikel [3, 4] veröffentlicht.

#### 5. BERICHT ÜBER REISEN

**Der Zeitraum 01.08.2013 – 31.07.2016**

(a) *Reise zwischen Rostock und Prag, Tschechien:*

26.08.2013 – 30.08.2013

**Kongreß “EQUADIFF 2013” (Differential Equations),**

Karlsuniversität Prag und Akademie der Wissenschaften der Tschechischen Republik,  
Prag, Tschechien.

(b) *Reise zwischen Rostock und Toulouse, Frankreich:*

01.02.2014 – 28.02.2014

(c) *Reise zwischen Rostock und Madrid, Spanien:*

07.07.2014 – 11.07.2014

**A.I.M.S. Kongreß on “Dynamical Systems, Differential Equations,  
and Applications”**, Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, Spanien.

Reisender: Herr VLADIMIR E. BOBKOV – Vortrag im studentischen Wettbewerb.

(d) *Reise zwischen Rostock und Toulouse, Frankreich:*

01.09.2014 – 30.09.2014

(e) *Reise zwischen Rostock und Columbus, Ohio, U.S.A.:*

11.10.2014 – 31.10.2014

(f) *Reise zwischen Rostock und Toulouse, Frankreich:*

22.08.2015 – 28.09.2015

(g) *Reise zwischen Rostock und Columbus, Ohio, U.S.A.:*

30.01.2016 – 06.03.2016

(h) *Reise zwischen Rostock und Ostrov u Tisé 12, CZ-403 36 Tisá, Tschechische Republik:*

29.05.2016 – 03.06.2016

**XXX. Seminar in Differential Equations, and Applications”**,

Ostrov u Tisé 12, CZ-403 36 Tisá, Tschechische Republik.

Reisende: FALKO BAUSTIAN und PETER TAKÁČ.

(k) *Reise zwischen Rostock und Orlando, Florida, U.S.A.:*

28.06.2016 – 10.07.2016

**A.I.M.S. Kongreß on “Dynamical Systems, Differential Equations,  
and Applications”**, Orlando, Florida, U.S.A.

(l) *Reise zwischen Rostock und Toulouse, Frankreich:*

01.09.2016 – 30.09.2016

Die Komplexität der Aufgabenstellung (und der daraus folgende Umfang des Arbeitsprogrammes) machte es zwingend notwendig, auf internationaler Ebene zu kooperieren und die Forschungsergebnisse auf Kongressen einem internationalem Publikum vorzustellen und mit anderen Wissenschaftlern zu diskutieren. Dies geschah bei den folgenden vier Kongressen:

- **Kongreß “EQUADIFF 2013” (*Differential Equations*)**,  
Karlsuniversität Prag und Akademie der Wissenschaften der Tschechischen Republik,  
Prag, Tschechien.  
26.08.2013 – 30.08.2013 (Organisator einer “Special Session”.)

- **A.I.M.S. Kongreß on “Dynamical Systems, Differential Equations, and Applications”**,  
Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, Spanien.  
07.07.2014 – 11.07.2014  
Reisende: VLADIMIR E. BOBKOV und PETER TAKÁČ.

- **XXX. Seminar in Differential Equations, and Applications”**,  
Ostrov u Tisé 12, CZ-403 36 Tisé, Tschechische Republik.  
29.05.2016 – 03.06.2016  
Reisende: FALKO BAUSTIAN und PETER TAKÁČ,

organisiert von der *Westböhmisches Universität Pilsen*, Tschechische Republik.

- **A.I.M.S. Kongreß on “Dynamical Systems, Differential Equations, and Applications”**,  
Orlando, Florida, U.S.A.  
28.06.2016 – 10.07.2016

Beim letzten Kongreß in den U.S.A. wurde über die neuen Ergebnisse aus den Arbeiten [1-5] berichtet.

## 6. ZUSAMMENFASSUNG (1 DIN A4-SEITE)

Das Forschungsprojekt hat sich mit der Entwicklung und den Anwendungen der qualitativen Methoden für *partielle Differentialgleichungen*, der *nichtlinearen Funktionalanalysis*, der *Variationsrechnung* und *dynamischer Systeme* auf die offenen Probleme der Gültigkeit schwacher und starker Maximum- und Vergleichsprinzipien für degenerierte und singuläre quasilineare parabolische Differentialgleichungen beschäftigt. Das schwache und starke Vergleichsprinzip für zwei Lösungen  $u, v: \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  einer parabolischen Randwertaufgabe mit dem  $p$ -Laplaceoperator  $\Delta_p$  und der Anfangsbedingung  $u(x, 0) \leq v(x, 0)$  in  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  hat sich bereits am Anfang als zu komplex erwiesen: unter nur gering unterschiedlichen Voraussetzungen waren die Ergebnisse sehr unterschiedlich. Daher haben wir uns zuerst auf den “einfacheren” Fall des schwachen und starken Maximumprinzips für zwei Lösungen  $u, v \equiv 0: \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Anfangsbedingung  $u(x, 0) \equiv 0 \leq v(x, 0)$  in  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  konzentriert. In diesem Fall wurde eine nichtnegative Lösung konstruiert, welche den Anfangswert (in der Zeit  $t = 0$ ) identisch gleich Null hat und danach (in der Zeit  $t \in (0, T)$ ) einen räumlich kompaktem Träger mit einer vorgeschriebenen Anzahl von Zusammenhangskomponenten in  $\Omega$  besitzt. Dies galt für den Fall der degenerierten (schwachen) Diffusion  $2 < p < \infty$ . Dagegen wurde für den Fall der singulären (starken) Diffusion  $1 < p < 2$  praktisch das starke Maximumprinzip bewiesen, wie man es für den linearen Laplaceoperator ( $p = 2$ ) kennt.

Für die FISHER-KOLMOGOROV-PETROVSKI-PISCOUNOV-Gleichung aus der Populationsgenetik (in einer Raumdimension) wurden LJAPUNOV-stabile *Wanderwellen* nachgewiesen, die einen kompakten Lebensraum ausgrenzen, in dem die Vielfalt der Population erhalten bleibt, obwohl sie an jedem festen Ort nach endlicher Zeit verloren geht. Dieses Phänomen tritt dank der nichtglatten Reaktionsfunktion  $f(u)$  (in den Punkten  $u = 0$  und  $u = 1$ ) auf. Für die Populationsgenetik folgt daraus eine wichtige Erkenntnis: *genetische Vielfalt* soll man nicht nur als statisches (zeitunabhängiges) Phänomen untersuchen, sondern eher als ein *dynamisches* Phänomen in einem “wandernden” Lebensraum. In dieser Arbeit handelt es sich um zwei konkurrierende Gene. Weiter wurde gezeigt, daß jede Trajektorie, die durch die FISHER-KPP-Gleichung erzeugt wird, gegen eine Wanderwelle konvergiert; wie schnell, das bleibt noch eine offene Frage.

Der Projektleiter hat sein Forschungsfreisemester “Wintersemester 2014/2015”, 01.10.2014 – 31.03.2015, zum Teil an der *Université de Poitiers* (Laboratoire du CNRS – Mathématiques), Frankreich, verbracht (vom 22.11.2014 bis zum 21.12.2014). Gemeinsame Untersuchungen mehrerer Symmetriefragen wurden in Zusammenarbeit mit Herrn Prof. Dr. JEAN-MICHEL RAKOTOSON durchgeführt.

PROF. DR. PETER TAKÁČ, PH.D., INSTITUT FÜR MATHEMATIK, UNIVERSITÄT ROSTOCK,  
ULMENSTRASSE 69, HAUS 3, 18051 ROSTOCK

*Email address:* peter.takac@uni-rostock.de