Universität Rostock
Traditio et Innovatio

Problemlösen lernen im Mathematikunterricht

Heuristische Lösungsbeispiele als textbasiertes Lernangebot

Annika Bachmann| Universität Rostock

Forschungsfragen

1. **Wie wirken sich verschiedene Gestaltungselemente eines heuristischen Lösungsbeispiels aus (lern- und schema-)theoretischer Sicht auf das potentiell erwerbbare Wissen für und über das mathematische Problemlösen aus?**
2. **Welche Entwurfsprinzipien für die Erstellung von heuristischen Lösungsbeispielen für das Problemlösenlernen können aus den Ergebnissen der Forschungsfrage (1) abgeleitet werden?**
3. **Inwiefern unterstützen konkrete entlang der Entwurfsprinzipien erstellte heuristische Lösungsbeispiele individuelle Problembearbeitungsprozesse von Mathematiklernenden?**

Was ist ein heuristisches Lösungsbeispiel?

Ein heuristisches Lösungsbeispiel ist ein **ausgearbeitetes Lösungsbeispiel**, das zusätzlich Aspekte von **Heuristik**, die wichtig für den Lösungsprozess sind, enthält (Reiss et al., 2008).

Problemstellung

schrittweise Präsentation eines Lösungsweges

Lösung

bekannte Gestaltungselemente

Segmentierung des Beispiels (z. B. Spanjers et al., 2012)
- untergliederte Darstellung eines Beispiels oder nachträgliche Einteilung als Teil der Aufgabenstellung

Selbsterklärungsaufforderungen (Renkl, 1997)
- antizipative Begründungen
- Reflexion der zugrundeliegenden Prinzipien der präsentierten Lösung auf der Metaebene
- Erörterung von Teilschritten im Lösungsprozess

Abbildung eines realistischen Bearbeitungsprozesses (Reiss & Renkl, 2002)
- explorative Wege und Irrwege
- Explizieren der verwendeten heuristischen Strategien und Hilfsmittel (z. B. Zeichnungen, Planskizzen)

Fiktiver Dialog zwischen Experte und Novizen (Zöttl & Reiss, 2010)
- ermöglicht sowohl Erklärungen auf Anfängerniveau als auch auf fortgeschrittenem Expertenniveau

Eigenaktivität (Reiss & Renkl, 2002)
- Aufforderungen zum eigenen Handeln

Theoretische Bezüge

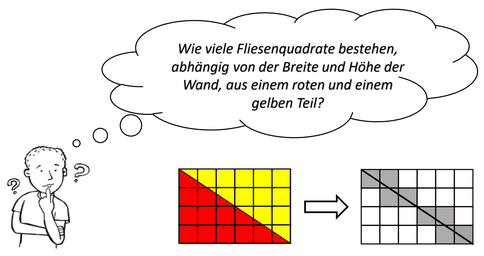
- **Cognitive Load Theory:** Reduzierung der kognitiven Belastung beim mathematischen Problemlösen zu Gunsten der Lernprozesse auf Metaebene (Sweller et al., 1998)
- **„Lösungsbeispiel-Effekt“:** erleichterter Aufbau von Schemata, die bei der Bearbeitung neuer Aufgaben helfen können (Sweller et al., 1998)

Erkenntnisse aus der empirischen Forschung

- **„Selbsterklärungs-Effekt“:** Bedeutsamkeit von Selbsterklärungen für die Effektivität der Lösungsbeispiele (Chi et al., 1989)
- empirische Bestätigung des Nutzens der Lösungsbeispiele auf verschiedenen Ebenen: Zeitaufwand, Transferleistung und kognitive Belastung (z. B. Paas & Merriënboer, 1994)
- empirische Bestätigung der Wirksamkeit der heuristischen Lösungsbeispiele in den Bereichen Beweisen und Modellieren (insbesondere für den anfänglichen Erwerb) (Reiss et al., 2008; Zöttl & Reiss, 2010)
- erhöhte Transparenz und Strukturierung der Bearbeitungsprozesse durch den Einbezug heuristischer Lösungsbeispiele (Tropper, 2019)

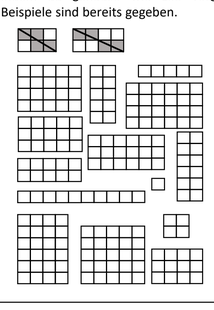
Wie kann das Prinzip des heuristischen Lösungsbeispiels gewinnbringend auf das mathematische Problemlösen übertragen werden?
Welche bekannten und neuen Gestaltungselemente eignen sich hierfür?

Ein heuristisches Lösungsbeispiel zum Problemlösen



Um zu einer Lösung zu gelangen, überlegt sich Leo einige Beispiele. Auf diese Weise kann er später eine erste Vermutung ableiten. Damit seine Zeichnungen genau werden, nutzt er sein Kästchenpapier und zeichnet sich die untenstehenden Rechtecke auf. Anschließend zeichnet er eine Diagonale ein und färbt die Quadrate, welche von dieser durchkreuzt werden. Diese entsprechen den zweifarbigen Fliesenquadraten.

Nun bist du an der Reihe! Vervollständige die Zeichnungen,
indem du genauso wie Leo vorgehst. Zwei Beispiele sind bereits gegeben.



Für den Fall, dass ein Rechteck um 90° gedreht wird und somit sich Breite und Höhe vertauschen, bleibt die Länge der Diagonalen gleich und ist demzufolge nicht von der Lage des Rechtecks abhängig. Daraus folgt nun, dass die Anzahl der von der Diagonale geschnittenen Quadrate in beiden Rechtecken gleich ist!

Überlege nun, ob sich manche deiner Tabellen zu einer zusammenfassen lassen, sodass die Beispiele eindeutig zugeordnet werden können. Leo hat es geschafft, alle seine Beispiele in drei Tabellen unterzubekommen. Schaffst du das auch?

Auszüge aus dem im Sommersemester 2018 im Rahmen der „Forschungswerkstatt:Mathematik“ an der Universität Rostock entwickelten heuristischen Lösungsbeispiel „Diagonale im Rechteck“

Ankertheorien

zur Modellierung des Problemlösewissens und als Basis für die Formulierung von Entwurfsprinzipien

Phasen des (mathematischen) Problemlösens

Auf der Metaebene kann das Problemlösen nach Pólya (1945) in die folgenden Phasen unterteilt werden:

- Verstehen der Aufgabe
- Ausdenken des Plans
- Ausführen des Plans
- Rückschau

Lerntheoretische Überlegungen

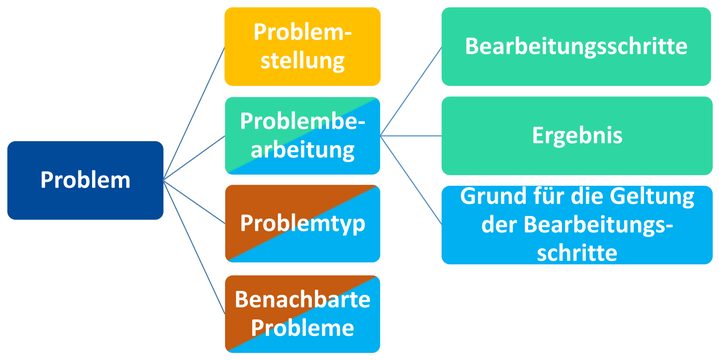
Aebli (1980) charakterisiert das Handeln als den Ausgangspunkt des Wissenserwerbs. Der Verinnerlichungsprozess verläuft über drei Stufen, für deren Übergänge die Reflexion der eigenen Tätigkeit notwendig ist.
Nach Sweller et al. (1998) ist diese Reflexion während des Problemlösens nur bedingt möglich. Heuristische Lösungsbeispiele ermöglichen die Anleitung zum eigenständigen Handeln sowie zu dessen Reflexion.
Die verinnerlichte Handlung kann als Handlungsschema modelliert werden, welches in weiteren Situationen zum Handeln befähigt.

Welche Handlungsschemata können theoriebasiert sowie auf empirischer Basis als gewinnbringend für das mathematische Problemlösen betrachtet werden?

Wissensmodelle auf lernpsychologischer Grundlage

Aufgrund der Integration schematheoretischer Wissenskonzepte durch operative Lerntheorien (vgl. Aebli, 1980) wird aufbauend auf Minsky (1975) und unter Einbezug von Problemlösetheorien (z. B. Pólya, 1945) das Problem-Schema nach Kaganova (2016) ergänzt.

Ein Schema repräsentiert eine stereotype Situation (z. B. Problem). Diese umfasst gewisse immer wiederkehrende Aspekte, die als festgelegt angesehen werden können. Die sich darunter befindenden Leerstellen müssen mit der konkreten Situation entsprechenden Daten belegt werden (z. B. Problemtyp des konkreten Problems).



Geplantes Vorgehen

1. Identifizierung von Gestaltungselementen heuristischer Lösungsbeispiele unter Einbezug (lern- und schema-)theoretischer Grundlagen
2. Herausarbeiten von Entwurfsprinzipien auf Grundlage der Gestaltungselemente sowie der Betrachtung nicht-angeleiteter Problembearbeitungsprozesse
3. Exemplarische Ausgestaltung eines heuristischen Lösungsbeispiels zu einem konkreten Problem(-typ)
4. Qualitative Untersuchung der Bearbeitungsprozesse der Schüler*innen im Umgang mit dem heuristischen Lösungsbeispiel (Videographie, Interview)

Weiterführende Perspektiven

- Ausweitung der Forschung zur vergleichenden Analyse von verschiedenen heuristischen Lösungsbeispielen
- Erstellung und Bereitstellung weiterer ausgestalteter und untersuchter heuristischer Lösungsbeispiele zum mathematischen Problemlösen auf dem Unterrichtshilfenportal MV für Lehrer*innen
- Vergleichende Untersuchung der heuristischen Lösungsbeispiele zum Problemlösen vor dem Hintergrund verschiedener Jahrgangsstufen

Literatur

Aebli, H. (1980). *Denken: das Ordnen des Tuns. Band I: Kognitive Aspekte der Handlungstheorie.* Stuttgart: Klett-Cotta.
Chi, M., Lewis, M. , Reimann, P., & Glaser, R. (1989). Self-explanations: How students study and use examples in learning to solve problems. *Cognitive Science, 13*, 145–182.
Kaganova, E. (2016). *Was uns Lehrtexte lehren. Eine empirische Untersuchung von Schulbuchlehrtexten im Fach Mathematik*. Wiesbaden: Springer Spektrum (Research).
Minsky, M. (1975). A Framework for Representing Knowlegde. In P. Winston (Hg.), *The Psychology of Computer Vision* (S. 211-281). New York: McGraw-Hill.
Paas, F., Merriënboer, J. (1994). Variability of worked examples and transfer of geometrical problem-solving skills: A cognitive-load approach. *Journal of Educational Psychology, 86*(1), 122–133.
Pólya, G. (1945). *How to solve it. A new aspect of mathematical method*. Princeton, N. J.: Princeton University Press.
Reiss, K., Heinze, A., Renkl, A., & Groß, C. (2008). Reasoning and proof in geometry: Effects of a learning environment based on heuristic worked-out examples. *ZDM, 40,* 456-467.
Reiss, K., & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *ZDM, 34*(1), 29–35.
Renkl, A. (1997). Learning from Worked-Out Examples: A Study on Individual Differences. *Cognitive Science, 21*(1), 1–29.
Spanjers, I., Gog, T., & Merriënboer, J. (2012). Segmentation of Worked Examples: Effects on Cognitive Load and Learning. *Applied Cognitive Psychology, 26*(3), 352–358.
Sweller, J., Merriënboer, J., & Paas, F. (1988). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review, 10*(3), 251–296.
Tropper, N. (2019). *Strategisches Modellieren durch heuristische Lösungsbeispiele: Untersuchungen von Lösungsprozeduren und Strategiewissen zum mathematischen Modellierungsprozess.* Wiesbaden: Springer Spektrum.
Zöttl, L., & Reiss, K. (2010). Heuristische Lösungsbeispiele. Eine Lerngelegenheit für den anfänglichen Erwerb von Modellierungskompetenz. *Der Mathematikunterricht, 56*(4), 20–27.

Ein Promotionsprojekt betreut von Prof. Dr. Eva Müller-Hill im Rahmen des Programms Fachdidaktik des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur MV

Universität Rostock | Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät| AG Didaktik der Mathematik | annika.bachmann@uni-rostock.de

Mecklenburg Vorpommern MV tut gut.
Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur