19.06.2017: Analysistag an der U Rostock

Vortragszusammenfassungen

Inkompressible Limites

Michael Dreher, Universität Rostock

Wir betrachten ein kompressibles Fluidmodell für den Ladungstransport, das aus drei Differentialgleichungen für die Massendichte, die Impulserhaltung und das elektrische Feld besteht. Es gibt verschiedene Mechanismen, die dieses Problem inkompressibel werden lassen können, wie zum Beispiel den quasi-neutralen Limes (darunter versteht man, dass das Fluid lokal elektrisch neutral wird) oder den Limes kleiner Mach-Zahl (das bedeutet, dass die Fließgeschwindigkeit vernachlässigbar wird im Vergleich zur hohen Schallgeschwindigkeit). Dieser Vortrag präsentiert einen allgemeinen funktionalanalytischen Rahmen für alle erwähnten Mechanismen.

Zur Geometrie des $p-$Laplace-Operators

Bernd Kawohl, Universität zu Köln

Der $p-$Laplace-Operator $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ ist für kein $p \in (1,2) \cup (2,\infty)$ gleichmässig elliptisch und entartet noch mehr für $p \to \infty$ und $p \to 1$. In diesen Grenzfällen führen Dirichlet- und Eigenwertprobleme auf unerwartete geometrische Fragestellungen. In meinem Übersichtsvortrag erinnere ich an einige wohlbekannte Eigenschaften von Eigenfunktionen zum klassischen $2-$Laplace-Operator und stelle deren Verallgemeinerungen zum Fall $p \in [1,\infty]$ dar. Ferner berichte ich über Resultate zum normalisierten oder spieltheoretischen $p-$Laplace-Operator

$$\Delta_p^N u := \frac{1}{p}\,|\nabla u|^{2-p}\Delta_p u = \frac{1}{p}\,\Delta_1^N u + \frac{p-1}{p}\,\Delta_\infty^N u$$

und seinem parabolischen Gegenstück $u_t - \Delta_p^N u = 0$. Diese Operatoren sind homogen vom Grade 1 und Δ_p^N ist gleichmässig elliptisch für alle $p \in (1,\infty)$. Insofern ist der normalisierte $p-$Laplace-Operator gutartiger als Δ_p; allerdings ist er nicht vom Divergenztyp.

Reproduzierende Kerne von Sobolev-Räumen und Anwendungen

Erich Novak, Friedrich-Schiller-Universität Jena

Wir betrachten die Sobolev-Räume $W_2^s(\mathbb{R}^d)$ für natürliche Zahlen s und d mit $s > d/2$ und behandeln zwei Probleme:

- Wie groß kann $\|f\|_\infty$ für ein f aus der Einheitskugel von $W_2^s(\mathbb{R}^d)$ höchstens sein? Dies ist die Frage nach der besten Konstanten im Einbettungssatz von Sobolev.
- Gilt der Fluch der Dimension für optimale Quadraturformeln $Q_n(f) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$, wenn man den Erwartungswert

  $$\mathbb{E}_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

  bezüglich beliebiger Wahrscheinlichkeitsmaße μ im $\mathbb{R}^d$ approximieren will? Oder genügt es, für den Fehler $\|Q_n - \mathbb{E}_\mu\| \le \varepsilon$ ein n zu wählen, das von der Dimension d unabhängig ist?

Für die Lösung dieser Probleme ist es zweckmäßig, den reproduzierenden Kern des Raumes $W_2^s(\mathbb{R}^d)$ zu studieren; dabei unterscheiden wir zwei verschiedene (äquivalente Standard-) Normen auf dem Sobolevraum. Beim zweiten Problem wird außerdem die probabilistische Methode eingesetzt.

Paraboloische Probleme in einem Kegel

Jürgen Roßmann, Universität Rostock

Im Vortrag wird die erste Rand-Anfangswertaufgabe für die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$$

und für das Stokessche System

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla p = f, \quad \nabla \cdot u = g$$

in einem unendlichen dreidimensionalen Kegel betrachtet. Durch die Laplace-Transformation gehen diese Gleichungen in das Dirichletproblem für die Gleichungen

$$(s - \Delta)\, U = F$$

bzw.

$$(s - \Delta)\, U + \nabla P = F, \quad \nabla \cdot U = G$$

über, wobei s ein komplexer Parameter mit $\operatorname{Re} s \geq 0$ ist. Während die erste Gleichung elliptisch mit Parameter im Sinne von Douglis/Nirenberg und Agranovich/Vishik ist, trifft dies auf das letzte System nicht zu. Hieraus ergeben sich signifikante Unterschiede in der Behandlung beider Probleme. Im Vortrag werden Lösbarkeitsaussagen in gewichteten Sobolevräumen sowie Aussagen zur Regularität und zur Asymptotik für beide Probleme gegenübergestellt.

Lösungen von parabolischen Anfangs- und Randwertaufgaben mit dem p-Laplaceoperator ($1 < p < \infty$), welche einen kompakten Träger mit mehreren Zusammenhangskomponenten haben

Peter Takáč*
Institut für Mathematik, Universität Rostock,
Ulmenstraße 69, Haus 3, D-18051 Rostock, Germany,
e-mail: peter.takac@uni-rostock.de
Web: http://www.math.uni-rostock.de/forschung/AngAnalysis

Abstract

Das schwache und starke Maximum- und Vergleichsprinzip für Lösungen degenerierter parabolischer Anfangs- und Randwertaufgaben mit dem p-Laplaceoperator $\Delta_p u \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ ($1 < p < \infty$) werden besprochen. Die zwei nichtlinearen Fälle, $2 < p < \infty$ (degenerierte Diffusion) und $1 < p < 2$ (singuläre Diffusion), unterscheiden sich voneinander "diametral":

Für $2 < p < \infty$ werden wir als Gegenbeispiel zur (i) Eindeutigkeit einer nichtnegativen Lösung, (ii) dem starken Maximumprinzip und (iii) dem schwachen Vergleichsprinzip eine nichtnegative schwache Lösung u der parabolischen Anfangs- und Randwertaufgabe mit den folgenden Eigenschaften konstruieren: $u \equiv u(x,t) : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ is nichtnegativ, erfüllt die triviale Anfangsbedingung $u(x,0) \equiv 0$ für alle $x \in \Omega$, und gleichzeitig auch die Dirichlet und Neumann-Randbedingung, in dem Sinne, daß für jede feste Zeit $t \in (0,T)$, die Funktion $u(\,\cdot\,,t) : \Omega \to \mathbb{R}_+$ einen kompakten Träger in $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ hat. Ist das Zeitintervall $(0,T)$ hinreichend kurz, so bleibt die Anzahl der Zusammenhangskomponenten des Trägers für alle Zeiten $t \in (0,T)$ konstant.

Für $1 < p < 2$ werden wir dagegen das klassische starke Maximumprinzip sogar für $\Omega = \mathbb{R}^N$ beweisen. Die Unterlösung dafür erhalten wir aus einer kugelsymmetrischen Welle mit beliebig hoher Ausbreitungsgeschwindigkeit.

*Joint work with Jiří Benedikt, Peter Girg, and Lukáš Kotrla, University of West Bohemia, Czech Republic.