Parabolische Probleme in einem Kegel

Rostock, 19. Juni 2017

1. Vorstellung der Probleme

K sei ein (unendlicher) Kegel in $\mathbb{R}^3$,

$$K = \{x \in \mathbb{R}^3,\ \omega = x/|x| \in \Omega\}$$

Betrachten die Probleme

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} U_t - \Delta U = F \ \text{ in } K \times (0, \infty), \\ U(x,t) = 0 \ \text{ for } x \in \partial K,\ t > 0, \quad U(x,0) = 0 \ \text{ for } x \in K \end{cases}$$

und

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} U_t - \Delta U + \nabla P = F, \ \ -\nabla \cdot U = G \ \text{ in } K \times (0, \infty), \\ U(x,t) = 0 \ \text{ for } x \in \partial K,\ t > 0, \quad U(x,0) = 0 \ \text{ for } x \in K \end{cases}$$

Laplace-Transformation bez. s führt zu

$$\text{(I')} \qquad su - \Delta u = f \;\text{ in } K, \quad u|_{\partial K} = 0$$

bzw.

$$\text{(II')} \qquad su - \Delta u + \nabla p = f, \;\; -\nabla \cdot u = g \;\text{ in } K, \quad u|_{\partial K} = 0$$

(s ist ein komplexer Parameter, im folgenden immer $\operatorname{Re} s \geq 0$)
Es gilt:

- (I') und (II') sind elliptisch für jedes gegebene s.
- (I') ist elliptisch mit Parameter, denn $s + |\xi|^2 \neq 0$ für $\operatorname{Re} s \geq 0, \xi \in \mathbb{R}^3$, $|s| + |\xi| \neq 0$.
- (II') ist nicht elliptisch mit Parameter, denn

$$\det \begin{pmatrix} (s + |\xi|^2)\, I_3 & i\xi \\ -i\xi & 0 \end{pmatrix} = -|\xi|^2 \, (s + |\xi|^2)^2$$

$= 0$ für $\xi = 0$, s beliebig.

2. Der Fall $s = 0$ (Dirichletproblem für die Poisson-Gl. bzw. das stationäre Stokessche System)

Für elliptische Probleme sind Lösbarkeits- und Regularitätsaussagen in gewichteten Sobolevräumen $V^l_\beta(K)$ bekannt:

$$\|u\|_{V^\ell_\beta(K)} = \Big(\int_K \sum_{|\alpha|\le\ell} r^{2(\beta-\ell+|\alpha|)} \left|\partial_x^\alpha u\right|^2 dx \Big)^{1/2}, \quad r = |x|.$$

Benötigen Eigenwerte spezieller operator pencils auf $\Omega \subset S^2$.

Für (I'): $\mathcal{L}_I(\lambda)\, u(\omega) = r^{2-\lambda}\,(-\Delta)\, r^\lambda u(\omega) = -\delta u - \lambda(\lambda+1)\, u$

Für (II'): $\mathcal{L}_{II}(\lambda) \begin{pmatrix} u(\omega) \\ p(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^{2-\lambda}(-\Delta r^\lambda u + \nabla r^{\lambda-1} p) \\ -r^{1-\lambda} \nabla \cdot (r^\lambda u) \end{pmatrix}$

Satz 1. 1) $s = 0$, *$f \in V^{\ell-2}_\beta(K)$, $l \ge 1$, $\ell - \beta - \frac{3}{2}$ ist kein Eigenwert von $\mathcal{L}_I(\lambda) \Rightarrow$ es existiert genau eine Lösung $u \in V^\ell_\beta(K)$ von (I').*

2) $s = 0$, *$f \in V_\beta^{\ell-2}(K)$, $g \in V_\beta^{\ell-1}(K)$, $l \geq 1$, keine Eigenwerte von $\mathcal{L}_{II}(\lambda)$ auf* $\operatorname{Re}\lambda = \ell - \beta - \frac{3}{2} \Rightarrow$ *es existiert genau eine Lösung $(u, p) \in V_\beta^{\ell}(K) \times V_\beta^{\ell-1}(K)$ von (II').*

Außerdem gilt die folgende Regularitätsaussage: *Sei $u \in V_\beta^{\ell}(K)$ Lösung von* (I'), $s = 0$ *und $f \in V_\beta^{\ell-2}(K) \cap V_{\beta'}^{\ell'-2}(K)$. Enthält das abgeschlossene Intervall zwischen $\ell - \beta - \frac{3}{2}$ und $\ell' - \beta' - \frac{3}{2}$ keine Eigenwerte von $\mathcal{L}_I(\lambda)$, dann ist $u \in V_{\beta'}^{\ell'}(K)$.*
Ein analoges Resultat gilt für Problem (II').

Literatur: Kondrat'ev 1967, Maz'ya und Plamenevskiĭ 1978

3. Aussagen für $s \neq 0$

- Problem (I): Solonnikov 1984, 2001, Kozlov und Maz'ya 1987, Nazarov 2001, de Coster und Nicaise 2011, Kozlov und Rossmann 2012, Kweon 2013
- allgemeinere parabolische Probleme (keine Systeme): Kozlov 1989, 1991,
- Stokessches System: Kozlov und Rossmann 2016 (n=3), Rossmann 2017 (n=2)

3.1 Der Operator für die Probleme (I') und (II')

Offenbar stellt $s - \Delta$ für beliebiges komplexes s und $\ell = 1, 2, \dots$ eine stetige Abbildung

$$E^{\ell}_{\beta}(K) \cap \overset{\circ}{E}{}^{1}_{\beta}(K) \ni u \to f = su - \Delta u \in E^{\ell-2}_{\beta}(K) \tag{1}$$

dar mit

$$E^{\ell}_{\beta}(K) = V^{\ell}_{\beta}(K) \cap V^{0}_{\beta}(K) \text{ für } \ell \geq 0, \quad E^{-1}_{\beta}(K) = \big(\overset{\circ}{E}{}^{1}_{-\beta}(K)\big)^{*}.$$

Satz 2. *Der Operator* (1) *ist Fredholmsch (hat abgeschlossenen Bildbereich und endlichen Index), falls* $\ell - \beta - \frac{3}{2}$ *kein Eigenwert von* $\mathcal{L}_l(\lambda)$ *ist. Andernfalls ist sein Bildbereich nicht abgeschlossen.*

Betrachten den Operator $(u, p) \to (su - \Delta u + \nabla p, -\nabla \cdot u)$.

Wie bei (I'): $u \in E^\ell_\beta(K) \cap \overset{\circ}{E}{}^1_\beta(K)$ ($\ell = 1$ oder $\ell = 2$)

Dann ist $su - \Delta u \in E^{\ell-2}_\beta(K)$ und

$$-\nabla \cdot u = g \in X^{\ell-1}_\beta(K) := V^{\ell-1}_\beta(K) \cap \left(V^1_{-\beta}(K)\right)^*.$$

Damit $\nabla p \in E^{\ell-2}_\beta(K)$ ist, muss gelten

$$p \in V^1_\beta(K) \ \text{ für } \ell = 2 \ \text{ und } p \in V^0_\beta(K) + V^1_\beta(K) \text{ für } \ell = 1.$$

Betrachten also die folgenden beiden Operatoren für (II'):

$$A_{1,\beta} : \overset{\circ}{E}{}^1_\beta(K) \times \left(V^0_\beta(K) + V^1_\beta(K)\right) \to (f, g) \in E^{-1}_\beta(K) \times X^0_\beta(K)$$

$$A_{2,\beta} : \left(E^2_\beta(K) \cap \overset{\circ}{E}{}^1_\beta(K)\right) \times V^1_\beta(K) \to (f, g) \in E^0_\beta(K) \times X^1_\beta(K)$$

Um Bedingungen für die Fredholmeigenschaft des Operators $A_{\ell,\beta}$ zu erhalten, benötigen wir zusätzlich zum operator pencil $\mathcal{L}_{II}(\lambda)$ den Operator

$$\mathcal{N}_{II}(\lambda)p(\omega) = \Big(-\delta p - \lambda(\lambda+1)\,p\,,\ \frac{\partial p}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} \Big)$$

Erklärung: Ist (u, p) Lösung von (II'), dann ergibt sich

$$-\Delta u + \nabla p = F,\ -\nabla \cdot u = g \ \text{ in } K,\ u|_{\partial K} = 0, \qquad (*)$$

mit $F = f - su$, und andererseits

$$-\Delta p = \phi \text{ in K}, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = \psi \ \text{ on } \partial K \backslash \{0\}, \qquad (**)$$

wobei $\phi = -\nabla \cdot f - (s - \Delta)g, \ \ \psi = (f + \Delta u) \cdot n$.

Hierbei ist su ein “schwacher Term” für kleines $r = |x|$,
$\Delta u \cdot n$ ein “schwacher Term” für großes $r = |x|$.

(*) ist eindeutig lösbar in $V_\beta^\ell(K) \times V_\beta^{\ell-1}(K)$ falls keine Eigenwerte von $\mathcal{L}_{II}(\lambda)$ auf $\operatorname{Re}\lambda = \ell - \beta - \frac{3}{2}$,
(**) ist eindeutig lösbar in $V_\beta^\ell(K)$ falls $\ell - \beta - \frac{3}{2}$ kein Eigenwert von $\mathcal{N}_{II}(\lambda)$ ist.

Satz 2'. 1) *Der Operator $A_{1,\beta}$ ist Fredholmsch, falls $-\beta - \frac{1}{2}$ kein Eigenwert von $\mathcal{N}_{II}(\lambda)$ ist und auf der Geraden $\operatorname{Re}\lambda = -\beta - \frac{1}{2}$ keine Eigenwerte von $\mathcal{L}_{II}(\lambda)$ liegen.*

2) *Der Operator $A_{2,\beta}$ ist Fredholmsch, falls $-\beta - \frac{1}{2}$ kein Eigenwert von $\mathcal{N}_{II}(\lambda)$ ist und auf der Geraden $\operatorname{Re}\lambda = -\beta + \frac{1}{2}$ keine Eigenwerte von $\mathcal{L}_{II}(\lambda)$ liegen.*

Sind die angegebenen Voraussetzungen nicht erfüllt, dann ist der Bildbereich des Operators nicht abgeschlossen.

3.2 Existenz von schwachen Lösungen

Satz 3. Sei $\operatorname{Re} s \geq 0$, $s \neq 0$, $|\beta|$ hinreichend klein. Dann gibt es

1) genau eine Lösung $u \in \overset{\circ}{E}{}^1_\beta(K)$ des Problems

$$\int_K \Big(s\, u\, v + \nabla u \cdot \nabla v \Big)\, dx = \int_K f\, v\, dx \;\forall v \in \overset{\circ}{E}{}^1_{-\beta}(K),$$

2) genau eine Lösung $(u,p) \in \overset{\circ}{E}{}^1_\beta(K) \times \big(V^0_\beta(K) + V^1_\beta(K) \big)$ von

$$\int_K \Big(s\, u \cdot v + \sum_{j=1}^{3} \nabla u_j \cdot \nabla v_j \Big)\, dx = \int_K f \cdot v\, dx \;\forall v \in \overset{\circ}{E}{}^1_{-\beta}(K),$$

$-\nabla \cdot u = g$ in K (für beliebiges $f \in E^{-1}_\beta(K)$, $g \in X^0_\beta(K)$).

Beweis für $\beta = 0$: 1) folgt direkt aus Lax-Milgram.
Für Aussage 2) benötigt man zusätzlich die Aussage, dass für jedes $g \in X^0_0(K) = L_2(K) \cap \big(V^1_0(K)\big)^*$ ein $u \in \overset{\circ}{E}{}^1_0(K)$ mit $\nabla \cdot u = g$ existiert.

Es ist möglich, die genauen Grenzen für β in Satz 3 anzugeben. Für Problem (I'): $|\beta| < \lambda_1 + \frac{1}{2}$, wobei λ_1 der kleinste positive Eigenwert von $\mathcal{L}_I(\lambda)$ ist.

3.2 Existenz, Eindeutigkeit starker Lösungen

Satz 4. *Der Operator* (1),

$$E^\ell_\beta(K) \cap \overset{\circ}{E}{}^1_\beta(K) \ni u \to f = su - \Delta u \in E^{\ell-2}_\beta(K)$$

ist injektiv für $\beta < \ell + \lambda_1 - \frac{1}{2}$ *und bijektiv für* $\ell - \lambda_1 - \frac{3}{2} < \beta < \ell + \lambda_1 - \frac{1}{2}$, *falls* $\operatorname{Re} s \geq 0$ *und* $s \neq 0$ *ist. Hierbei ist* λ_1 *der kleinste positive Eigenwert von* $\mathcal{L}_I(\lambda)$.

Im Fall $\ell = 2$, $\frac{1}{2} - \lambda_1 < \beta < \frac{3}{2} + \lambda_1$, $\operatorname{Re} s \geq 0$ gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{V^2_\beta(K)} + |s|\,\|u\|_{V^0_\beta(K)} \leq c\,\|su - \Delta u\|_{V^0_\beta(K)}$$

für $u \in E^2_\beta(K) \cap \overset{\circ}{E}{}^1_\beta(K)$, c unabhängig von u und s.

Betrachten wieder das Problem (II'). Hier hängen die Grenzen für β von den Eigenwerten zweier operator pencils ab:

- Das Spektrum von $\mathcal{L}_{II}(\lambda)$ besteht aus den Eigenwerten λ_k, $k \geq 1$, mit positivem Realteil, $0 < \lambda_1 < \operatorname{Re} \lambda_2 \leq \cdots$ und den Eigenwerten $\lambda_{-k} = -1 - \lambda_k$. Da $\lambda = 1$ immer ein Eigenwert ist (mit konstantem Eigenvektor $(0, 1)$), gilt $0 < \lambda_1 \leq 1$. Im Fall $\Omega \subset S^2_+$ gilt $\lambda_1 = 1$.
- Die Eigenwerte von $\mathcal{N}_{II}(\lambda)$ sind reell: $\cdots < \mu_{-2} < \mu_{-1} = -1 < 0 = \mu_1 < \mu_2 < \cdots$, $\mu_{-k} = -1 - \mu_k$. Die Eigenwerte $\mu_1 = 0$ und μ_{-1} sind einfach, die zugehörigen Eigenfunktionen sind konstant.

Satz 4'. *Es sei* $\operatorname{Re} s \geq 0$, $s \neq 0$. *Dann gilt*

1) *Der Operator* $A_{2,\beta}$ *ist injektiv für* $-\mu_2 - \frac{1}{2} < \beta < \lambda_1 + \frac{3}{2}$.
2) *Der Operator* $A_{2,\beta}$ *stellt für* $\frac{1}{2} - \lambda_1 < \beta < \frac{1}{2}$ *einen Isomorphismus auf* $E^0_\beta(K) \times X^1_\beta(K)$ *dar. Für die Lösung von* (II') *gilt dann die Abschätzung*

$$\|u\|_{V^2_\beta(K)} + |s|\, \|u\|_{V^0_\beta(K)} + \|p\|_{V^1_\beta(K)}$$

$$\leq c \left(\|f\|_{V^0_\beta(K)} + \|g\|_{V^1_\beta(K)} + |s|\, \|g\|_{(V^1_{-\beta}(K))^*} \right). \qquad (2)$$

3) *Der Operator* $A_{2,\beta}$ *stellt für* $\frac{1}{2} < \beta < \min(\mu_2 + \frac{1}{2}, \lambda_1 + \frac{3}{2})$ *einen Isomorphismus auf den Teilraum*

$$\left\{ (f, g) \in E^0_\beta(K) \times X^1_\beta(K) : \int_K g\, dx = 0 \right\} \qquad (3)$$

dar.

Die Grenzen für β *sind scharf, wenn* $\lambda_1 < 1$ *ist.*

Erläuterung zu den Aussagen 2) und 3):
Man kann zeigen, dass die konstante Funktion $q = 1$ genau dann zu $\left(X^1_\beta(K)\right)^* = \left(V^1_\beta(K)\right)^* + V^1_{-\beta}(K)$ gehört, wenn $\frac{1}{2} < \beta < \frac{5}{2}$ ist. Ist also $u \in E^2_\beta(K) \cap \overset{\circ}{E}{}^1_\beta(K)$ und damit $\nabla \cdot u \in X^1_\beta(K)$, dann gilt

$$\int_K \nabla \cdot u \, dx = 0$$

falls $\frac{1}{2} < \beta < \frac{5}{2}$. In diesem Fall ist das Paar $(v, q) = (0, 1)$ ein Element von $\ker A^*_{2,\beta}$, und $A_{2,\beta}$ ist eine Abbildung in den Teilraum (3).

Verbesserung im Fall $\lambda_1 = 1$

Wir nehmen an, dass $\lambda_1 = 1$ und dass dies ein einfacher Eigenwert von $\mathcal{L}_{II}(\lambda)$ ist (ist z.B. der Fall wenn Ω Teil einer Halbsphäre ist, also insbesondere auch, wenn K konvex ist).

Dann erhält man die Injektivität von $A_{2,\beta}$ für

$$-\mu_2 - \frac{1}{2} < \beta < \mathrm{Re}\,\lambda_2 + \frac{3}{2}$$

(statt für $-\mu_2 - \frac{1}{2} < \beta < \lambda_1 + \frac{3}{2}$). Außerdem ist $A_{2,\beta}$ ein Isomorphismus auf $E^0_\beta(K) \times X^1_\beta(K)$, falls

$$\max\left(-\mu_2 - \frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2} - \mathrm{Re}\,\lambda_2\right) < \beta < \frac{1}{2},\ \beta \neq -\frac{1}{2}$$

oder

$$\mu_2 > 2 \text{ und } \ \frac{5}{2} < \beta < \min\left(\mu_2 + \frac{1}{2}\,,\ \mathrm{Re}\,\lambda_2 + \frac{3}{2}\right)$$

und ein Isomorphismus auf den Teilraum (3), falls

$$\frac{1}{2} < \beta < \min\left(\mu_2 + \frac{1}{2}\,, \mathrm{Re}\,\lambda_2 + \frac{3}{2}\right).$$

3.3 Regularitätsaussagen

Sei $u \in E^2_\beta(K)$ bzw. $(u,p) \in E^2_\beta(K) \times V^1_\beta(K)$ eine Lösung von (I') bzw. (II'). Frage: Unter welchen Bedingungen gilt $u \in E^2_\gamma(K)$ bzw. $(u,p) \in E^2_\gamma(K) \times V^1_\gamma(K)$?

Satz 5. *Es sei $u \in E^2_\beta(K)$ eine Lösung des Problems* (I') *mit $f \in E^0_\beta(K) \cap E^0_\gamma(K)$. Dann gilt $u \in E^2_\gamma(K)$ falls*

(i) $\gamma > \beta$ *oder*

(ii) $\gamma < \beta$ *ist und keine Eigenwerte von $\mathcal{L}_I(\lambda)$ im Intervall $[\frac{1}{2} - \beta, \frac{1}{2} - \gamma]$ liegen.*

Satz 5'. *Es sei $(u,p) \in E^2_\beta(K) \times V^1_\beta(K)$ eine Lösung von* (II') *mit $f \in E^0_\beta(K) \cap E^0_\gamma(K)$, $g \in X^1_\beta(K) \cap X^1_\gamma(K)$. Ferner gelte*

(i) $\gamma > \beta$ *und es liegen keine Eigenwerte von $\mathcal{N}_{II}(\lambda)$ in $\left[-\gamma - \frac{1}{2}\, , -\beta - \frac{1}{2} \right]$*

oder

(ii) $\gamma < \beta$ *und es liegen keine Eigenwerte von* $\mathcal{L}_{II}(\lambda)$ *in* $-\beta + \frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} \lambda \leq -\gamma + \frac{1}{2}$.

Dann ist $(u, p) \in E^2_\gamma(K) \times V^1_\gamma(K)$.

4. Das zeitabhängige Problem

Beschränken uns auf das Problem (II)

$$U_t - \Delta U + \nabla P = F, \quad -\nabla \cdot U = G \;\text{ in } K \times (0,\infty),$$
$$U(x,t) = 0 \;\text{ for } x \in \partial K,\; t > 0, \quad U(x,0) = 0 \;\text{ for } x \in K$$

Funktionenräume: $L_2\big(\mathbb{R}_+, V^l_\beta(K)\big)$ Raum mit Norm

$$\|U\|_{L_2\left(\mathbb{R}_+, V^l_\beta(K)\right)} = \Big(\int_0^\infty \|U(\cdot,t)\|^2_{V^l_\beta(K)}\, dt \Big)^{1/2}$$

Ferner: $W^{2,1}_\beta(K \times \mathbb{R}_+) =$ Raum aller $U \in L_2\big(\mathbb{R}_+, V^2_\beta(K)\big)$ derart, dass $\partial_t U \in L_2\big(\mathbb{R}_+, V^0_\beta(K)\big)$.

Aus Satz 4' ergibt sich

Satz 6. *Sei* $F \in L_2\big(\mathbb{R}_+, V^0_\beta(K)\big)$, $G \in L_2\big(\mathbb{R}_+, V^1_\beta(K)\big)$, $\partial_t G \in L_2\big(\mathbb{R}_+, (V^1_{-\beta}(K))^*\big)$ *und* $G(x,0) = 0$ *für* $x \in K$, *wobei*

$$-\lambda_1 + 1/2 < \beta < \min\big(\mu_2 + 1/2\,,\, \lambda_1 + 3/2\big), \quad \beta \neq 1/2.$$

Im Fall $\beta > 1/2$ *nehmen wir außerdem an, dass* $\int_K G(x,t)\,dx = 0$ *für fast alle* t *ist. Dann existiert genau eine Lösung* $(U,P) \in W^{2,1}_\beta(K \times \mathbb{R}_+) \times L_2\big(\mathbb{R}_+, V^1_\beta(K)\big)$ *von* (II). *Für diese gilt die Abschätzung*

$$\|U\|_{W^{2,1}_\beta(K\times\mathbb{R}_+)} + \|P\|_{L_2(\mathbb{R}_+,V^1_\beta(K))} \leq c\,\Big(\|F\|_{L_2(\mathbb{R}_+,V^0_\beta(K))} + \|G\|_{L_2(\mathbb{R}_+,V^1_\beta(K))} + \|\partial_t G\|_{L_2(\mathbb{R}_+,(V^1_{-\beta}(K))^*)}\Big)$$

mit einer Konstanten c unabhängig von von F, G.

Im Fall $\lambda_1 = 1$ kann die Bedingung an β wieder abgeschwächt werden.

Weitere Ergebnisse:

- Regularitätsaussagen für die Lösung (vgl. Satz 5')
- Asymptotik der Lösung